

1. 历史上的数学危机

1-1 什么是数学危机

为了讲清楚第三次数学危机的来龙去脉，我们首先要说明什么是数学危机。一般来讲，危机是一种激化的、非解决不可的矛盾。从哲学上来看，矛盾是无处不在的、不可避免的，即便以确定无疑著称的数学也不例外。数学中有大大小小的许多矛盾，比如正与负、加法与减法、微分与积分、有理数与无理数、实数与虚数等等。但是整个数学发展过程中还有许多深刻的矛盾，例如有穷与无穷，连续与离散，乃至存在与构造，逻辑与直观，具体对象与抽象对象，概念与计算等等。在整个数学发展的历史上，贯穿着矛盾的斗争与解决。而在矛盾激化到涉及整个数学的基础时，就产生数学危机。矛盾的消除，危机的解决，往往给数学带来新的内容，新

的进展，甚至引起革命性的变革，这也反映出矛盾斗争是事物发展的历史动力这一基本原理。

整个数学的发展史就是矛盾斗争的历史。斗争的结果就是数学领域的发展。人类最早认识的是自然数。从引进零及负数就经历过斗争：要么引进这些数，要么大量的数的减法就行不通。同样引进分数使乘法有逆运算——除法，否则许多实际问题也不能解决。但是接着又出现了这样的问题，是否所有的量都能用有理数来表示？发现无理数导致第一次数学危机。危机的解决促使逻辑的发展和几何学的体系化。

方程的解导致虚数的出现，虚数从一开始就被认为是"不实的"。可是这种不实的数却能解决实数所不能解决的问题，从而为自己争得存在的权利。几何学的发展从欧几里得几何的一统天下发展到各种非欧几何学也是如此。

在十九世纪发现了许多用传统方法不能解决的问题，如五次及五次以上代数方程不能通过加、减、乘、除、开方求出根来；古希腊几何三大问题，即三等分任意角、倍立方体、化圆为方不能通过圆规、直尺作图来解决。这些否定的结果表明了传统方法的局限性，也反映了人类认识的深入。这种发

现给这些学科带来极大的冲击，几乎完全改变了它们的方向。比如说，代数学从此以后向抽象代数学方面发展，而求解方程的根变成了分析及计算数学的课题。在第三次数学危机中，这种情况也多次出现，尤其是包含整数算术在内的形式系统的不完全性、许多问题的不可判定性都大大提高了人们的认识，也促进了数理逻辑的大发展。

这种矛盾、危机引起发展，改变面貌，甚至引起革命，在数学发展历史上是屡见不鲜的。第二次数学危机是由无穷小量的矛盾引起的，它反映了数学内部的有限与无穷的矛盾。数学中也一直贯穿着计算方法、分析方法在应用与概念上清楚及逻辑上严格的矛盾。在这方面，比较注意实用的数学家盲目应用，而比较注意严密的数学家及哲学家则提出批评。只有这两方面取得协调一致，矛盾才能解决。后来算符演算及δ函数也重复了这个过程，开始是形式演算、任意应用，直到施瓦尔兹（L. Schwartz，1915—）才奠定广义函数论的严整系统。

对于第三次数学危机，有人认为只是数学基础的危机，与数学无关。这种看法是片面的。诚然，问题涉及数理逻辑和集合论，但它一开始就牵涉到无穷集合，而现代数学脱离无穷集合可以说寸步难

行。一种极端的观点是只考虑有限集合或至多是可数的集合，不过这样一来绝大部分数学将不复存在。即便这些有限数学的内容，也有许多问题要涉及无穷方法。比如解决数论中的许多问题都要用解析方法。由此看来，第三次数学危机是一次深刻的数学危机。

1-2 第一次数学危机

从某种意义上来讲，现代意义下的数学，也就是作为演绎系统的纯粹数学，来源于古希腊毕达哥拉斯（Pythagoras，约公元前550年）学派。这个学派兴旺的时期为公元前500年左右。它是一个唯心主义流派。他们重视自然及社会中不变因素的研究，把几何、算术、天文学、音乐称为“四艺”，在其中追求宇宙的和谐及规律性。他们认为“万物皆数”，数学的知识是可靠的、准确的，而且可以应用于现实的世界。数学的知识是由于纯粹的思维而获得，并不需要观察、直觉及日常经验。毕达哥拉斯的数是指整数，他们在数学上的一项重大发现是证明了勾股定理。他们知道满足直角三角形三边长

的一般公式，但由此也发现了一些直角三角形的三边比不能用整数来表达。这样一来，就否定了毕达哥拉斯派的信条：宇宙间的一切现象都能归结为整数或整数之比。实际上证明很简单，在欧几里得（Euclid，公元前三世纪）的《几何原本》第十篇中就有证明。例如两边长为1的直角三角形，第三边弦的长度设为m/n，约去m、n的公因数，则m、n之中至少有一个是奇数。按照毕达哥拉斯定理

$1^2+1^2=2=\frac{m^2}{n^2}$，所以$m^2=2n^2$是偶数，从而m必是偶数，因此n是奇数。设$m=2p$，则$4p^2=2n^2$，$n^2=2p^2$，从而n是偶数，这样就导致矛盾。所以不能以整数之比来表示，也就是勾长或股长与弦长是不可通约的。

不可通约性的发现引起第一次数学危机。有人说，这种性质是希帕索斯(Hippasus)约在公元前400年发现的，为此，他的同伴把他抛进大海。不过更有可能是毕达哥拉斯已知这种事实，而希帕索斯因泄密而被处死。不管怎样，这个发现对古希腊的数学观点有极大的冲击。这表明，几何学的某些真理与算术无关，几何量不能完全由整数及其比来表示，反之数却可以由几何量表示出来。整数的尊

崇地位受到挑战，于是几何学开始在希腊数学中占有特殊地位。同时这也反映出，直觉和经验不一定靠得住，而推理证明才是可靠的。从此希腊人开始由“自明的”公理出发，经过演绎推理，并由此建立几何学体系，这不能不说是数学思想上一次巨大革命。这是第一次数学危机的自然产物。

回顾以前的各种数学，无非都是“算”，也就是提供算法。即使在古希腊，数学也是从实际出发，应用到实际问题中去的。比如泰利斯（Thales，约公元前600年）预测日食，利用影子距离计算金字塔高度，测量船只离岸距离等等，都是属于计算技术范围的。至于埃及、巴比伦、中国、印度等国的数学，并没有经历过这样的危机和革命，也就只停留在“算学”阶段。而希腊数学则走向完全不同的道路，形成欧几里得《几何原本》的公理体系与亚里士多德（Aristotle，公元前384—322）的逻辑体系。

1-3 第一次数学危机的产物——古典逻辑与欧氏几何学

亚里士多德的方法论对于数学方法的影响是巨

大的。他指出正确的定义原理，他继承自己老师柏拉图(Plato，公元前427—347)的观念，把定义与存在区分，由某些属性来定义的东西可能未必存在（如正九面体）。另外，定义必须用已存在的定义过的东西来定义，所以必定有些最原始的定义，如点、直线等。而证明存在的方法需要规定和限制。

亚里士多德还指出公理的必要性，因为这是演绎推理的出发点。他区别了公理和公设，认为公理是一切科学所公有的真理，而公设则只是某一门学科特有的最基本的原理。他把逻辑规律（矛盾律、排中律等）也列为公理。

亚里士多德对逻辑推理过程进行深入研究，得出三段论法，并把它表达成一个公理系统。这是最早的公理系统。他关于逻辑的研究不仅使逻辑形成一个独立学科，而且对数学证明的发展也有良好的影响。

亚里士多德对于离散与连续的矛盾有一定阐述。对于潜在的无穷（大）和实在的无穷（大）加以区别。他认为正整数是潜在无穷的，因为任何整数加上1以后总能得到一个新的数。但是他认为所谓“无穷集合”是不存在的。他认为空间是潜在无穷的，时间在延长上是潜在无穷的，在细分上也是潜

在无穷的。

欧几里得的《几何原本》对数学发展的作用无须在此多谈。不过应该指出，欧几里得的贡献在于他有史以来第一次总结了以往希腊人的数学知识，构成一个标准化的演绎体系。这对数学乃至哲学、自然科学的影响一直延续到十九世纪。牛顿的《自然哲学的数学原理》和斯宾诺莎的《伦理学》等都采用欧几里得《几何原本》的体例。

欧几里得的平面几何学为《几何原本》的最初四篇与第六篇。其中有七个原始定义，五个公理和五个公设。他规定了存在的证明依赖于构造。

第五篇为比例理论。

第七、八、九篇讲算术，他的算术不仅仅是一些算法规则，更重要的是他引进一些有关数的性质的概念，如素数。他证明素数的数目比任何指定的数目都要多。这些可以看成是数论的萌芽。

第十篇是不可公度量的分类。他把不可公度量作为与数不同的量加以研究。

第十一篇至第十三篇是立体几何及穷竭法，其中证明了不存在五种正多面体以外的正多面体。这些地方已具有近代数学的特点。

《几何原本》在西方世界成为仅次于《圣经》

而流传最广的书籍。它一直是几何学的标准著作。但是它还存在许多缺点并不断受到批评。比如，对于点、线、面的定义是不严格的："点是没有部分的对象"，"线是没有宽度的长度(线指曲线)"，"面是只有长度和宽度的对象"，它们不能起逻辑推理的作用。特别是直线、平面的定义更是从直观来解释的（"直线是同其中各点看齐的线"）。另外，他的公理5是"整体大于部分"，没有涉及无穷量的问题。在他的证明中，原来的公理也不够用，须加上新的公理。特别是平行公设是否可由其他公理、公设推出更是人所瞩目的问题。尽管如此，近代数学的体系特点已经基本上形成了。

1-4 非欧几何学的诞生

欧几里得的《几何原本》是第一次数学危机的产物。尽管它有种种缺点和毛病，毕竟两千多年来一直是大家公认的典范。尤其是许多哲学家，把欧几里得几何学摆在绝对几何学的地位。十八世纪大部分人都认为欧几里得几何是物质空间中图形性质的正确理想化。特别是康德(I.Kant, 1724—1804)

认为关于空间的原理是先验综合判断，物质世界必然是欧几里得式的，欧几里得几何是唯一的、必然的、完美的。)

既然是完美的，大家希望公理、公设简单明白、直接了当。其他的公理和公设都满足这个条件，唯独平行公设不够简明，象是一条定理。欧几里得的平行公设是：每当一条直线与另外两条直线相交，在它一侧作成的两个同侧内角的和小于两直角时，这另外两条直线就在同侧内角和小于两直角的那一侧相交。在《几何原本》中，证明前28个命题并没有用到这个公设，这很自然引起人们考虑，这条啰哩啰嗦的公设是否可由其他的公理和公设推出，也就是说，平行公设可能是多余的。二千年来，许许多多人曾试图证明这点，但是都失败了。有些人开始自以为成功，但是经过仔细检查，所有的证明都使用了一些其他假设，而这些假论又可以从平行公设推出来。所以他们只不过得到一些和平行公设等价的命题罢了。到了十八世纪，有人开始用反证法来证明，即假设平行公设不成立，企图由此得出矛盾。他们得出一些推论，比如“有两条线在无穷远点处相交，而在交点处这两条线有公垂线”。在他们看来，这些结论不合情理，因此不可能真实。但

是这些推论的含义不清楚，也很难说是导出矛盾。所以不能说由此证明了平行公设。

从旧的欧几里得几何观念到新几何观念的确立，需要在某种程度上解放思想。

1. 能从二千多年来证明平行公设的失败过程中看出这个证明是办不到的事，并且这种不可能性是可以加以证实的。高斯（C.F.Gauss，1777—1855年）已经看到了这一点。

2. 选取与平行公设相矛盾的其他公设，也能建立逻辑上没有矛盾的几何。这主要是罗巴切夫斯基（Н.И.Лобачевский，1793—1856）和波耶（J.Bolyai，1802—1860）的开创性工作。

3. 欧几里得几何不一定是物质空间的几何学，欧几里得几何学只是许多可能的几何学中的一种。

4. 几何学由直觉、经验来检验的空间科学变成一门纯粹数学，也就是说，它的存在性只由无矛盾性来决定。虽说象兰伯特（J.Lambert，1728—1777）等人已有这些思想苗头，但是真正把几何学变成这样一门纯粹数学的是希尔伯特。

这个过程是漫长的，主要一步是罗巴切夫斯基和波耶分别独立地创立非欧几何学，尤其是考虑无矛盾性是历史上的独创。后人把罗氏几何的无矛盾

性隐含地变成欧氏几何无矛盾性的问题。这种利用“模型”和证明“相对无矛盾性”的思想一直贯穿到以后的数学基础的研究中。而且这种把非欧几何归结到大家一贯相信的欧氏几何，也使得大家在接受非欧几何方面起了重要作用。

应该指出，非欧几何为广大数学界接受还是经过一番艰苦斗争的。首先要证明第五公设的否定并不会导致矛盾，只有这样才能说新几何学成立，才能说明第五公设独立于别的公理公设，这是一个起码的要求。当时证明的方法是证明“相对无矛盾性”。因为当时大家都承认欧几里得几何学没有矛盾，如果能把非欧几何学用欧几里得几何学来解释而且解释得通，也就变得没有矛盾。而这就要把非欧几何中的点、直线、平面、角、平行等翻译成欧几里得几何学中相应的东西，公理和定理也可用相应欧几里得几何学的公理和定理来解释，这种解释叫做非欧几何学的欧氏模型。对于罗巴切夫斯基几何学，最著名的欧氏模型有意大利数学家贝特拉米（E.Beltrami，1835—1899）于1869年提出的常负曲率曲面模型、德国数学家克莱因（F.Klein，1849—1925）于1871年提出的射影平面模型和彭加勒在1882年提出的用自守函数解释的单位圆内部模

型。这些模型的确证实了非欧几何的相对无矛盾性，而且有的可以推广到更一般非欧几何，即黎曼（B.Riemann，1826—1866）创立的椭圆几何学。另外还可以推广到高维空间上。因此，从十九世纪六十年代末到八十年代初，大部分数学家接受了非欧几何学。尽管有的人还坚持欧几里得几何学的独特性，但是许多人明确指出非欧几何学和欧氏几何学平起平坐的时代已经到来。当然也有少数顽固派，如数理逻辑的缔造者弗雷格，至死不肯承认非欧几何学，不过这已无关大局了。

非欧几何学的创建对数学的震动很大。数学家开始关心几何学的基础问题，从十九世纪八十年代起，几何学的公理化成为大家关注的目标。由此产生希尔伯特的新公理化运动。

1-5 第二次数学危机

早在古代，人们就对长度、面积、体积的度量问题感兴趣。古希腊的欧多克斯（Eudoxes，约公元前400—347）引入量的观念来考虑连续变动的东西，并完全依据几何来严格处理连续量。这造成数

与量的长期脱离，古希腊的数学中除了整数之外，并没有无理数的概念，连有理数的运算也没有，可是却有量的比例。他们对于连续与离散的关系很有兴趣。尤其是芝诺提出四个著名的悖论：第一个悖论是说运动不存在，理由是运动物体到达目的地之前必须到达半路，而到达半路之前又必须到达半路的半路……如此下去，它必须通过无限多个点，这在有限长时间之内是无法办到的。第二个悖论是跑得很快的阿希里赶不上在他前面的乌龟。因为乌龟在他前面时，他必须首先到达乌龟的起点，然后用第一个悖论的逻辑，乌龟老在他的前面。这两个悖论是反对空间、时间无限可分的观点的。而第三、第四悖论是反对空间、时间由不可分的间隔组成。第三个悖论是说“飞矢不动”，因为在某一时间间隔，飞矢总是在某个空间间隔中确定的位置上，因而是静止的。第四个悖论是游行队伍悖论，内容大体相似。这说明希腊人已经看到“无穷小”与“很小很小”的矛盾。当然他们无法解决这些矛盾。

希腊人虽然没有明确的极限概念，但他们在处理面积体积的问题时，却有严格的逼近步骤，这就是所谓“穷竭法”。它依靠间接的证明方法，证明了许多重要而难证的定理。

到了十六、十七世纪，除了求曲线长度和曲线所包围的面积等类问题外，还产生了许多新问题，如求速度、求切线，以及求极大、极小值等问题。经过许多人多年的努力，终于在十七世纪晚期，形成了无穷小演算——微积分这门学科。这也就是数学分析的开端。

牛顿（I.Newton，1642—1727）和莱布尼兹（Leibniz，1646—1716）被公认为微积分的奠基者。他们的功绩主要在于：

1. 把各种问题的解法统一成一种方法，微分法和积分法。

2. 有明确的计算微分法的步骤。

3. 微分法和积分法互为逆运算。

由于运算的完整性和应用范围的广泛性，使微积分成为解决问题的重要工具。同时关于微积分基础的问题也越来越严重。

以求速度为例，瞬时速度是$\frac{\Delta s}{\Delta t}$当$\Delta t$变成零时的值。$\Delta t$是零，是很小的量，还是什么东西。这个无穷小量究竟是不是零，引起了极大的争论，造成第二次数学危机。

十八世纪的数学家成功地用微积分解决了许

多实际问题。有些人对基础问题不感兴趣，如达兰贝尔（J.d'Alembert，1717—1783）说，现在是“把房子盖得更高些，而不是把基础打得更加牢固”。许多人认为严密化是烦琐。微积分的基础一直受到一些人的批判和攻击。特别有名的是贝克莱主教（G.Berkeley，1685—1753）在1734年的攻击。

十八世纪的数学思想的确是不严密的，直观的，强调形式的计算而不管基础的可靠。其中特别是：

1．没有清楚的无穷小概念，从而导数、微分、积分等概念不清楚。

2．对无穷大概念不清楚。

3．发散级数求和的任意性，如$1-1+1-1+\cdots\cdots$可等于1，0，$\frac{1}{2}$；以及$1+2+4+8+\cdots\cdots=-1$ $\left(\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots\cdots,\ x=2\right)$。

4．符号的不严格使用，如高阶微分，$\int d^2x=dx$等。

5．不考虑连续性就进行微分。不考虑导数及积分的存在性以及可否展成幂级数等。

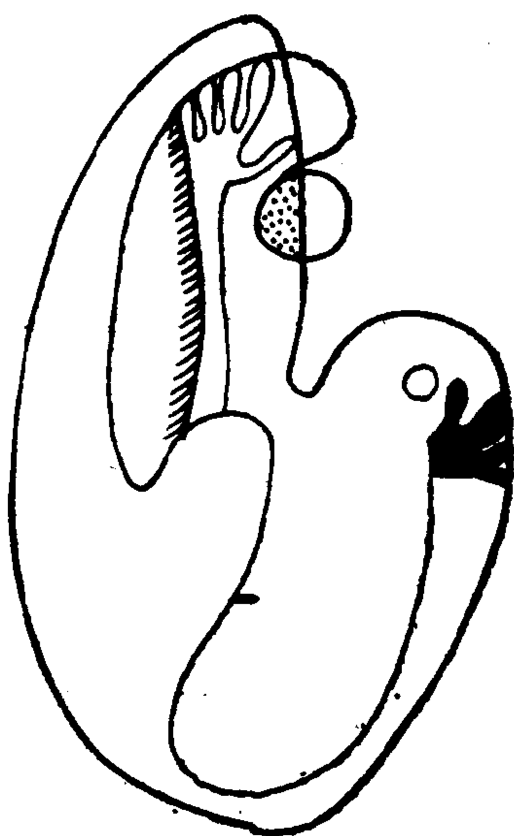
一直到十九世纪二十年代，一些数学家才比较

关注于微积分的严格基础，它们从波尔查诺（B. Bolano，1781—1848）、阿贝尔（N.Abel，1802—1829）、柯西（A.Cauchy、1789—1857）、狄里赫利（P. G. Dirichlet，1805—1859）等人的工作开始，而到威尔斯特拉斯，戴德金和康托尔彻底完成，中间经历半个多世纪，基本上解决了矛盾，为数学分析奠定了一个严格的基础。

波尔查诺不承认无穷小数和无穷大数的存在，而且给出连续性的正确定义。柯西在1821年的《代数分析教程》中从定义变量开始，认识到函数不一定要有解析表达式。他抓住极限的概念，指出无穷小量和无穷大量都不是固定的量而是变量，并定义导数和积分。阿贝尔指出要严格限制滥用级数展开及求和。狄里赫利给出函数的现代定义。在这些数学工作的基础上，威尔斯特拉斯消除了其中不确切的地方，给出现在通用的$\varepsilon-\delta$的极限、连续定义，并把导数、积分严格地建立在极限的基础上，从而克服了危机和矛盾。

十九世纪七十年代初，威尔斯特拉斯、戴德金、康托尔等人独立地建立了实数理论，而且在实数理论的基础上，建立起极限论的基本定理，从而使数学分析建立在实数理论的严格基础之上。

同时，威尔斯特拉斯给出一个处处不可微的连续函数的例子。这个发现以及后来许多病态函数的例子，充分说明直观及几何的思考不可靠，而必须诉诸严格的概念及推理。由此，第二次数学危机使数学更深入地探讨数学分析的基础——实数论的问题。这不仅导致集合论的诞生，并且由此把数学分析的无矛盾性问题归结为实数论的无矛盾性问题。而这正是二十世纪数学基础中的首要问题。



2. 第三次数学危机产生的背景



第三次数学危机产生于十九世纪末及二十世纪初，当时正是数学空前兴旺发达的时期。首先是逻辑的数学化促使数理逻辑这门学科诞生。十九世纪七十年代康托尔创立的集合论是现代数学的基础，也是产生危机的直接来源。十九世纪末戴德金及皮亚诺对算术及实数理论进行公理化推动了公理化运动，而公理化运动的最大成就则是希尔伯特在1899年对于初等几何的公理化。公理化方法是现代数学最重要的方法之一，对于数学基础和数理逻辑的研究也有影响。当时也是现代数学一些新分支兴起的时期，如抽象代数学、点集拓扑学和代数拓扑学、泛函分析、测度与积分理论等学科。这些学科的发

展一直与数学基础及数理逻辑的发展有着密切的关系。数学的更新与发展也对数学哲学有许多新的探讨，数学的陈腐哲学观念在当时已经几乎一扫而空了。

2-1 数学符号化的扩充：数理逻辑的兴起

数学的主要内容是计算和证明。在十七世纪，算术因符号化促使代数学的产生，代数使计算变得精确和方便，也使计算方法系统化。费尔马（P. Fermant 1601—1665）和笛卡儿（R. Descartes 1596—1650）的解析几何，把几何学代数化，大大扩展了几何的领域，而且使得少数天才的推理变成机械化的步骤。这反映了代数学作为普遍科学方法的效力，于是笛卡儿尝试也把逻辑代数化。他的一些手稿就是关于这方面的工作的。与笛卡儿同时代的英国哲学家霍布斯（T. Hobbes，1588—1679）也认为推理带有计算性质，不过他并没有系统地发展这种思想。

现在公认的数理逻辑创始人是莱布尼兹。他的目的是选出一种“通用代数”，其中把一切推理都

化归为计算。实际上这正是数理逻辑的总纲领。他希望建立一套普遍的符号语言，其中符号是表义的，这样就可以象数字一样进行演算，他的确将某些命题形式表达为符号形式，但他的工作只是一个开头，大部分没有发表，因此影响不大。

真正使逻辑代数化的是英国数学家布尔（G. Boole，1815—1864），他在1847年出版了《逻辑的数学分析》，给出了现代所谓的“布尔代数”的原型。布尔确信符号化会使逻辑变得严密。他的对象是事物的类，1表示全类，0表示空类，x•y表示x和y的共同分子所组成的类，运算是逻辑乘法，x＋y表示x和y两类所合成的类，运算是逻辑加法。所以逻辑命题可以表示如下：

凡x是y　　$x\cdot(1-y)=0$；

没有x是y　　$x\cdot y=0$；

它还可以表示矛盾律　　$x\cdot(1-x)=0$；

排中律　　$x+(1-x)=1$。

布尔看出类的演算也可解释为命题的演算。当x，y不是类而是命题，则$x=1$表示命题x为真，$x=0$表示命题x为假，$1-x$表示x的否定等等。

显然布尔的演算构成一个代数系统，遵守某些规律，这就是布尔代数。特别是它遵从德·莫尔根

（A. De Morgan 1806—1871）定律。

美国哲学家、数学家小皮尔斯（C. S. Peirce, 1839—1914）推进了命题演算。他区别命题和命题函数。一个命题总是真的或假的，而一个命题函数包含着变元，随着变元值的选取的不同，它可以是真也可以是假。皮尔斯还引进了两个变元的命题函数以及量词和谓词的演算。

对现代数理逻辑贡献最大的是德国数学家弗雷格。他是耶拿大学教授，在十九世纪他的著作流传不广，他的符号系统烦琐复杂，从而限制了它的普及。他在1879年出版的《概念文字》中不仅完备地发展了命题演算，而且引进了量词概念以及实质蕴涵的概念。他还给出一个一阶谓词演算的公理系统。这可以说是历史上第一个符号逻辑的公理系统。因此在这本只有88页的小册子中，包含着现代数理逻辑一个颇为完备的基础。1884年，他的《算术基础》出版，后来又扩展成《算术的基本规律》（卷Ⅰ，1893，卷Ⅱ，1903）。后来由于罗素的独立工作，才使得弗雷格的工作受到重视。

用符号语言对数学进行公理化的是意大利数学家皮亚诺，他在1889年用拉丁文写了一本小册子《用新方法陈述的算术原理》。在这之前，1888

年，皮亚诺已经把布尔和施罗德（F. Schröder, 1841—1902）的逻辑用在数学研究上，并且引进了一系列对于他前人工作的更新。例如对逻辑运算和数学运算使用不同的符号，区别范畴命题和条件命题，这引导他得出量词理论。这些改进是对于布尔和施罗德理论的改进，而不是对弗雷格理论的改进，因为当时皮亚诺还不知道弗雷格的工作。在《算术原理》中，他在引进逻辑概念和公式之后，开始用符号的记法来重写算术，在这本书中他讨论了分数、实数、甚至极限和点集论中的概念。

皮亚诺引进最原始的算术概念是“数”，“1”，“后继”和“等于”，并且陈述了关于这些概念的九条公理。今天我们认为其中公理2、3、4、5都是讨论恒等的，应该属于逻辑公理，所以就剩下了五条公理。这就是现在众所周知的皮亚诺公理。最后一条公理即公理9，就是所谓数学归纳法原理，他用类的词句来表述，其中包含一个类变元“k”（它甚至涉及到所有类的类k）。皮亚诺承认他的公理化来自戴德金。

从1开始，皮亚诺用x＋1来表示后继函数。然后作为定义引进了加法和乘法。这些定义是递归的定义。虽然在他的系统中皮亚诺没有象戴德金那样

有力的定理可资利用，但皮亚诺并没有公开地宣称这些定义可以去掉。

这本书的逻辑部分还列出命题演算的公式，类演算的公式，还有一部分量词的理论。皮亚诺的符号要比布尔和施罗德的符号高明得多，标志着向近代逻辑的重要转变。他还对于命题的演算和类演算做了某些区别。这就是我们现在的两种不同演算，而不是同一种演算的两种不同解释。它的普遍量词记号是新的，而且是便利的。不过书里还是存在缺点，公式只是列出来的，而不是推导出来的。因为没有给出推导规则，皮亚诺引进了代入规则的概念，但是也没有给出任何规则。更严重的是他没有给出任何分离规则，结果尽管他的系统有许多优点，但他没有可供使用的逻辑。一直到后来，他才在一系列文章，特别是1895年发表的《数学论集》中，对这些逻辑公式进行了证明。然而他这些证明也还是缺少推演规则的。在这方面他受到了弗雷格的批评。后来皮亚诺尽力想比弗雷格的《概念文字》有更多的内容，但是他做得并不够。不过他的这些著作在数学界仍有很大影响，得到广泛的传播。

2.1.1 命题演算

逻辑演算是数理逻辑的基础。命题演算是逻辑演算最基本的组成部分。命题演算研究命题之间的关系，比如简单命题和复杂命题之间的关系，简单命题如何构成复杂命题，由简单命题的真假如何推出复杂命题的真假等等。对于具体命题，我们不难通过机械运算来达到我们的目的。这就是命题的算术。当我们用x，y，z代表具体的数时，算术就成为代数。在命题演算中，我们具体的数就是命题，而一般的数就是命题变元。由命题变元组成的公式千变万化，可真可假，看你把什么命题代入到命题变元中去。这正象 $a+b=c+d$，对$a=2$，$b=3$，$c=1$，$d=4$ 成立，而对 $a=1$，$b=2$，$c=3$，$d=4$就不成立。可是代数公式$x+y=y+x$对任何代入均成立。在命题演算中也有类似的一些公式叫重言式，它不管你代入什么命题都成立。这些重言式的命题当然是我们感兴趣的对象。我们的任务就是把重言式的规律性总结出来，特别是它们是不是可以从少数公理推出来，这个公理系统是我们研究的主要对象。

正如在代数学中，我们用符号 x,y,z代替数，

在命题演算中，我们用符号A，B，C，代替语句（或命题），然后还能用一些连接词把它们连结成更为复杂的语句。语句有真有假，复杂语句的真假与组成的语句有关，也与连接词有关。它们可以通过“计算”来确定。不过最简单的关系可用“真值表”来表示。

在一般语句尤其是在数学的语句中，常见的连接词有┐（否定）、∧（合取）、∨（析取）、⇒（蕴涵）、⇔（等价，当且仅当）等。

把┐放在一个语句之前，就表示该语句的否定，所以它的真值表可表示如下：

A	┐A
真	假
假	真

这表示，如果A真，则┐A假；如果A假，则┐A真。这反映了我们通常的逻辑规律，一个语句不真则假，也就是排中律。这种逻辑中任何语句的“真值”，只有两个“真”或“假”，所以这种逻辑也叫二值逻辑。

∧表示“和”“且”，如A表示“今天天晴”，B表示“明天下雨”，则A∧B就表示“今天天晴且明天下雨”，A∧B的真假与A，B的真假有关，由下面真值表表示：

A	B	$A\wedge B$
真	真	真
假	真	假
真	假	假
假	假	假

也就是只有A和B均真时，$A\wedge B$才真。

数理逻辑中的连结词$\vee$常常译做“或”。不过一般的“或”有两种意思：一种是互斥的“或”，也就是不能同时出现的，如这只小鸡是公的或者是母的；另一种是可以同时出现，也就是可以相容的，如现在正在刮风或者正在下雨，可以理解为刮风不下雨，或下雨不刮风，也可以又刮风又下雨。在数理逻辑中，我们把$\vee$完全按照第二种意义来理解。它的定义是$\neg(\neg A\wedge\neg B)$所以$\vee$的真值表是这样的：

A	B	$A\vee B$
真	真	真
假	真	真
真	假	真
假	假	假

逻辑和数学中最重要的连结词是“如果A则B”这种语句常称为条件式或蕴涵式，也就是由A可推出B来。在数理逻辑中用符号$A\supset B$，$A\to B$来表示。

本书为了不同集合论符号和映射符号混淆，用$A\Rightarrow B$表示。但是数理逻辑中对$A\Rightarrow B$的意义与一般理解不同，它的定义是$\neg(A\wedge\neg B)$，它的真值表为：

A	B	$A\Rightarrow B$
真	真	真
假	真	真
真	假	假
假	假	真

由真值表可以看出，这种$A\Rightarrow B$与通常理解的“如果A则B”有根本不同，通常推理中不认为由假命题推出真命题的推理是正确的，而数理逻辑中的“蕴涵”$\Rightarrow$则可以由假命题推出任何命题来，不管是真是假。这就是所谓“实质蕴涵”。这看起来似乎不可理解，于是有人向罗素挑战，要他从“$2+2=5$”这个假命题推出“罗素与某主教（x）是一个人”。罗素于是做出了下面的推导：“假设$2+2=5$，而我知道$2+2=4$，故$4=5$。两边减1得$3=4$，再减1得$2=3$，再减1得$1=2$；大家知道罗素与x是两个人，由$1=2$，所以推出罗素与x是一个人。”

$A\Longleftrightarrow B$表示语句A和语句B可以互推，有相同真值，也就是同时为真或同时为假。也常用$A\equiv B$表示。它的真值表为：

A	B	$A \Longleftrightarrow B$
真	真	真
假	真	假
真	假	假
假	假	真

有了真值表之后，由这些连结词构成的复杂语句的真假也就可以一步一步“演算”出来，这种过程就叫“语句演算”。例如：

求 $(A \Longleftrightarrow B) \Rightarrow (\neg A \wedge B)$ 的真值表：

A	B	$A \Longleftrightarrow B$	$\neg A$	$\neg A \wedge B$	$(A \Longleftrightarrow B) \Rightarrow (\neg A \wedge B)$
真	真	真	假	假	假
假	真	假	真	真	真
真	假	假	假	假	真
假	假	真	真	假	假

如果语句很长很复杂，我们不必一步一步都写出来，而只把真假值写在连结词下面就可以了，例如上句的真假表可以写成：

$(A \Longleftrightarrow B) \Rightarrow (\neg A \wedge B)$

真　真真　假　假真假真

假　假真　真　真假真真

真　假假　真　假真假真

假　真假　假　真假假假

当然，通过逻辑连结词可以得出许许多多语句，这些语句中最重要的一类是它的真假与组成它的A，B，C，D…诸语句的真假无关，或者说是恒真或恒假。恒取真值的语句我们称为重言式，恒取假值的语句则是矛盾式。这两者互为否定，即如A是重言式，则$\neg$A是矛盾式，反之如A是矛盾式，则$\neg$A是重言式。所以我们可以只研究重言式。

现在的问题是给定一个复杂的语句，如何判定它是不是重言式。我们的办法是把一个复杂的语句经过等值的变换成为我们容易判定的标准形式。标准形式一般有两种，一种是许多析取式的合取式，另一种是许多合取式的析取式。这两种标准形式是互相对偶的。

我们遵照下面的变形规则可以把任何复杂语句变成标准形式：

1）对于$\wedge$及$\vee$的演算可以象代数学一样使用结合律、交换律和分配律。

2）把$\neg\neg x$换成x。

3）$\neg(x\wedge y)$换成$(\neg x)\vee(\neg y)$。

$\neg(x\vee y)$换成$(\neg x)\wedge(\neg y)$。

4）$x\Rightarrow y$换成$\neg x\vee y$

$x \Leftrightarrow y$换成$(\neg x \vee y) \wedge (\neg y \vee x)$。例如，$(x \Rightarrow y) \Leftrightarrow (\neg y \Rightarrow \neg x)$通过等值变形规则可以变为$[x \vee y \vee (\neg x)] \wedge [(\neg y) \vee y \vee (\neg x)] \wedge [(\neg y) \vee (\neg x) \vee y] \wedge [x \vee (\neg x) \vee y]$，它们都是一些析取项（由$\vee$连结）的合取式（由$\wedge$连结）。变成这样的标准形式，就不难判断它是否为重言式了。

要使合取式为重言式，则需每一析取项为真。要想每个析取项$x \vee y \vee z \vee \cdots \vee W$为真，只要其中至少一个x为真。最能说明问题的是不管什么x，$x \vee (\neg x)$永远为真，所以只要每个析取项中都包含有$x \vee (\neg x)$形式的式子，则整个合取式必定为重言式。

例如要判定$(X \wedge Y) \Rightarrow X$是否重言式，把它变形为$\neg (X \wedge Y) \vee X$，再变形为$(\neg X) \vee (\neg Y) \vee X$，它只有一项，含有$X \vee (\neg X)$，所以是重言式。

同样也可把任何复杂语句表示为合取式的析取式。

我们已经能够判断哪些复合语句是重言式了。很自然，我们希望把整个重言式的系统公理化，也就是用少数重言式通过一定的推理规则得出所有的

重言式。这样就构成一个命题演算的公理系统。例如怀特海（A.N.Whitehead，1861—1947）和罗素在《数学原理》中所用的是：

公理（1）　$X \vee X \Rightarrow X$

（2）　$X \Rightarrow X \vee Y$

（3）　$X \vee Y \Rightarrow Y \vee X$

（4）　$(X \Rightarrow Y) \Rightarrow [Z \vee X \Rightarrow Z \vee Y)$

还有一个公理（5）$X \vee (Y \vee Z) \Rightarrow Y \vee (X \vee Z)$，后来证明是多余的。另外还有（1）代入规则，即每个命题变元在其出现的每一处代以相同的命题；（2）推理规则，由A及A⇒B两公式可推出新公式B。

这个公理系统很简单，可以由它推出所有的重言式。但是命题演算的公理系统不止一个，除了用V和⇒为基本连结词外，还有用{┐，V}，{┐，Λ}，{⇒，┐}，{┐，V，Λ}，{┐，V，Λ，⇒}，{┐，V，Λ，⇒，⇔}等为基本连结词的。特别有趣的是有人只用一个基本连结词，如舍佛（sheffer)符号｜，它表示“并非两者都…”，以及“↓”（表示既非…，亦非…）。选定基本连结词后，还可以建立不同的形式系统。问题的关键在于建立每个形式系统的协调性，独立性及完全性。这些证明是不难的。独立性通常用模型的方法证

明，协调性通过真值表可以推出。困难一些的是完全性定理，即重言式都可以用公理推出来。对于命题演算最早是由美国逻辑学家波斯特（E.L.Post，1897—1954）在1921年给出证明的。他的证明方法是把命题化为标准形式——合取范式。教科书中常见的证明是匈牙利数学家卡尔马（L. Kalmar，1905—1976）给出的。除了这些构造性证明之外，还有用布尔代数的非构造性证明。

2.1.2 一阶谓词演算

在命题演算中，形式化的对象及演算的对象都是语句。但是，在数学乃至一般推理过程中，许多常见的逻辑推理并不能建立在命题演算的基础上。例如：

1. 张三的每位朋友都是李四的朋友，
   王五不是李四的朋友，
   所以王五不是张三的朋友。
2. 5大于3，
   3大于2，
   所以5大于2。

因此，我们必须深入到语句的内部，也就是要把语句分解为主语和谓语。古典逻辑只是把语句分解为

"a是b"的办法是根本不够的，应该采用"a，b有关系R"，"a，b，c有关系R"，以及"a具有性质P"等等说法。也就是把语句分解成个体（表为a，b，c，x，y，z）和谓词（表为P，Q，R），一元谓词即谓词或性质，如"是素数"用P表示，3是素数用P（3）表示。同样多元谓词是多元关系，如5大于3，可表为$5>3$，或$>(5，3)$，或Q（5，3）。对于一般语句，个体也可用变元x，y表示，如Q（x，y）。对于变元x的变动范围，如果任何x均能具有性质P，则我们用$\forall xP(x)$表示，如果有x能具有性质P，则我们用$\exists xP(x)$表示。$\forall$和$\exists$分别称为全称量词和存在量词。这些量词是弗雷格在1879年引进的，这在逻辑史上是一个重要里程碑，可以认为数理逻辑真正由此开始。

谓词演算要比命题演算范围宽广得多，这由变元也可以反映出来。命题演算的变元只是语句或命题，而谓词演算的变元有三类：

1．个体变元，它的范围极广，如上面例子中的张三、李四、王五、2、3、5等等。谓词演算中个体变元是代替一类符号的，这个类叫它的变域。

2．命题变元，用X，Y，Z表示。

3．谓词变元，用P，Q表示，每个变元有固定

的元数，也就是它表示多少个对象的关系。

由于谓词演算中有全称量词和存在量词，在这些量词后面的变化称为约束变元，其他变元称为自由变元。最简单的谓词演算是狭义谓词演算，现在通称一阶谓词演算。

由于变元较多，需要把“公式”解释得清楚一些，我们把一些经过有限次应用下列规则而得到的符号组合称为公式：

1. 一个命题变元是一个公式。

2. 一个谓词变元，它的括号中已有个体变元，则为一个公式。

3. 如一个符号组合A是一公式，则$\neg A$也是一公式。

4. 如A，B为两个公式，如个体变元在两个公式中同为约束或同为自由，则$A\wedge B$、$A\vee B$，$A\Rightarrow B$，$A\Leftrightarrow B$也是公式。

5. 如果A（x）为一公式，其中变元x是自由变元，则$\forall x A(x)$，$\exists x A(x)$也是公式。如果公式中还有其它变元，对其他变元也可依同法给出。

如果谓词演算的公式不含自由变元，就称为一个语句或闭公式。一个形式的语句可以有多种解

释，比如下面三个语句：

（1）$\forall x \forall y [P(x, y) \Rightarrow P(x, y)]$，

（2）$\forall x \forall y \forall z [(P(x, y) \wedge P(y, z)) \Rightarrow P(x, z)]$，

（3）$\forall y \exists x P(x, y)$，

其中P是个二元谓词。我们可以把P（x，y）解释为x是y的先辈，表示全体人元内的一个关系。x，y，z可以在全体活人和死人范围内取值，则(1)，（2），（3）都是真命题。用这种解释，（1），（2），（3）成为：

（1′）对于任何x和y，如果x是y的先辈，则x是y的先辈。

（2′）对于所有x，y，z，如果x是y的先辈，y是z的先辈，则x是y的先辈。

（3′）每人都有一位先辈。

另外，我们也可以把P解释为大于>（或小于<），个体域取自自然数（或有理数,实数等等），这三个语句也是真命题。

从上面可以看出，谓词演算的一个语句可以包含许多语句，甚至无穷多语句(如自然数中的>)。这些语句，有的语句的真假与解释有关，比如把P（x，y）解释为“x是y的父亲”，则（1），

（3）为真，但（2）不对，把P（x，y）解释为“x是y的儿子”则（2）、（3）均不对，但是（1）仍然成立。象（1）这样的语句，不论怎样解释都成立，我们称为普遍有效的，对公式也是如此。而有的公式对于特定解释为真，则称为可满足的。普遍有效的公式肯定是可满足的，但可满足的公式不一定是普遍有效的。

谓词演算中的普遍有效公式与命题演算中的重言式还是有差别的。我们有行之有效的具体方法来判定一个公式是不是重言式。这种方法每一步都有明确的规定，并且可以在有限步内完成，这种方法我们称为能行的。但是在谓词演算中，并没有一种能行的方法来判定任何一个公式是否普遍有效的。这就需要寻找一种能行的方法来判定某个具体公式或一类公式是否普遍有效，这就是所谓判定问题。它是数理逻辑中最主要的问题之一。

一阶谓词演算的普遍有效公式也有一个公理系统。一个简单的公理系统是在命题演算公理系统中增加关于量词的两条公理，共有六条：

1. $X \vee X \Rightarrow X$

2. $X \Rightarrow X \vee Y$

3. $X \vee Y \Rightarrow Y \vee X$

4. $(X \Rightarrow Y) \Rightarrow [Z \vee X \Rightarrow Z \vee Y]$

5. $\forall x P(x) \Rightarrow P(y)$

6. $P(y) \Rightarrow \exists x P(x)$

第五条公理是讲，“如果一个谓词P对一切x都成立，则它对任何一个y也成立。”

第六条公理是讲，“如果一个谓词P对某一个y成立，则存在一个x使P成立。”

另外，同样也有代入规则及推理规则（由公式A及A⇒B可得一个新公式B）。另外，还有约束变元改字规则等变形规则。

在谓词演算中也可以将每一个公式通过变形规则化为标准形式。其中最常用的是所谓前束范式，也就是公式中所有的量词都放在最前面，而且每个量词之前都没有否定号┐，它们之间没有括号隔离开，从而量词的作用区域全都展延到公式的末尾。不仅如此，还可以把前束范式进一步化成斯科兰姆（T.Skolem，1887—1963）范式，它不但具有前束范式的形状，而且每一个存在量词都在所有全称量词之前。

利用范式可以解决许多问题，最重要的是哥德尔证明的一阶谓词演算的公理系统的完全性定理，即可以证明：公式A在公理系统中可以证明的当且

仅当A是普遍有效的。同样，一阶谓词演算的公理系统也是协调（无矛盾）的和独立的。

1936年丘奇（A. Church 1903—）和图林（A.Turing 1912—1954）独立证明一阶谓词演算公式的一般判定问题不可解。问题变为去解决具有特殊形式的范式的公式的判定问题。

2.1.3 其他逻辑演算

逻辑演算系统很多。命题演算应该说来源于布尔。布尔的系统是非真即假的二值系统。真值大于2的逻辑系统称为多值逻辑。多值逻辑首先由波兰数学家卢卡西维茨（Łukasiewicz 1878—1956）在1920年引进的。波斯特在1921年也独立地引进。多值逻辑有着广泛的应用。七十年代国际上多次召开专门的多值逻辑会议。

另一种常见的逻辑是模态逻辑，是美国逻辑学家刘易斯（C.I.Lewis，1883—1964）在1918年引进的。他考虑的不是实质蕴涵而是严格蕴涵。另外，他在逻辑中也考虑所谓必要性与可能性等问题，引进著名的模态算子◇，这是直观可能性的形式化。他建立了五个公理系统，用S_1，S_2，…，S_5表示。

还有一个包括古典逻辑演算的公理系统，即直觉主义公理系统。其中否定排中律（$\neg\neg P \rightarrow P$），是荷兰数学家海丁（A. Hey ting，1899—1980）于1930年引进的。它虽因直觉主义而得名，但是可以得到其他的解释，它在现代数理逻辑的研究中十分重要。

在数理逻辑的研究中，狭义谓词演算是最重要的。狭义谓词演算也称一阶谓词演算，许多人默认，数学中所用的逻辑，通用一阶谓词演算。但是，许多涉及数学问题的逻辑演算必须加进有关等号的谓词，称为具等式的一阶谓词演算。这是现在最常用的一种逻辑系统，在研究算术系统中要用到它。但是，即使象实数的算术系统，一阶谓词演算也是不够的，更何况现代数学中涉及集合的子集，因此一阶谓词演算是不足以表达的。这时需要二阶谓词演算乃至高阶谓词演算，其中首先出现的是谓词变元。

不过，在现代数理逻辑的研究中，常常通过其他方式推广一阶谓词演算。比如一种常用的“无穷”逻辑Lw_1w允许无穷公式，即公式中容许可数多合取或析取，不过量词仍限制为有限多。这种无穷逻辑现在在集合论、逆归论、模型论当中是必不

可少的。

另外一种途径推广一阶谓词演算是引进新的量词，比如“存在许多…”。

逻辑系统比数学系统更不统一，各人用的系统在细节上有许多不同，而且同一概念也用不同的符号来表示。

第一套是弗雷格自己系统运用的，但是连他的后继者也不用这套极不方便的符号系统。

第二套是皮亚诺首先在《数学论集》提出的，后经罗素和怀特海在《数学原理》中使用。一般文献通用的都是这种符号系统的改进形式，如希尔伯特和他的学生们采用的也属于这一套。

第三套是卢卡西维茨使用的，后来也有人用，如普瑞尔（A.N.Prior）在《形式逻辑》中就加以采用。

为了方便起见，把各派符号列表如下：

意　义	符　　号			
	怀特海及罗素	希尔伯特	卢卡西维茨	本书
非	～	—，¬	N	¬
或	V	V	A	V
和	·	&	K	Λ
如果…则…	⊃	→	C	⇒
当且仅当	≡	～，↔	E	⇔
存在某个x	(∃x)	(Ex)	(Ex)	∃x
对于所有x	(x)	(x)	(x)	∀x

2-2 寻找数学的基础：集合论的创立

2.2.1 集合论的创立和传播

集合论的创立者格奥尔格·康托尔，1845年3月3日出生于俄国圣彼得堡（今苏联列宁格勒）一个商人家庭。他在中学时期就对数学感兴趣。1862年，他到苏黎世上大学，1863年转入柏林大学。当时柏林大学正在形成一个数学教学与研究的中心。他在1867年的博士论文中已经反映出“离经叛道”的观点，他认为在数学中提问的艺术比起解法来更为重要。的确，他原来的成就并不总是在于解决问

题，他对数学的独特贡献在于他以特殊提问的方式开辟了广阔的研究领域。他所提出的问题一部分被他自己解决，一部分被他的后继者解决，一些没有解决的问题则始终支配着某一个方向的发展，例如著名的连续统假设。



图2 G.康托尔

(1845—1918)

1869年康托尔取得在哈勒大学任教的资格，不久就升为副教授，并在1879年升为教授。他一直到去世都在哈勒大学工作。哈勒是一个小地方，而且薪金微薄。他原来希望在柏林找到一个薪金较高、声望更大的教授职位，但是在柏林，那位很有势力

而且又专横跋扈的克洛耐克（L.Kronecker，1823—1891）处处跟他为难，堵塞了他所有的道路。原因是克洛耐克对于他的集合论，特别是他的“超穷数”观点持根本否定的态度。由于用脑过度和精神紧张，从1884年起，他不时犯深度精神抑郁症，常常住在疗养院里。1918年1月6日他在哈勒大学附近的精神病院中去世。

集合论的诞生可以说是在1873年年底。1873年11月，他在和戴德金的通信中提出了一个问题，这个问题使他从以前关于数学分析的研究转到了一个新方向。他认为，有理数的集合是可以“数”的，也就是可以和自然数的集合成一对一的对应。但是，他不知道，对于实数集合这种一对一的对应是否能办到。他相信不能有一对一的对应，但是他“讲不出什么理由”。不久之后，他承认他“没有认真地考虑这个问题，因为它似乎没有什么价值。”接着他又补充一句，“要是你认为它因此不值得再花费力气，那我就会完全赞同。”可是，康托尔又考虑起集合的映射问题来。很快，他在1873年12月7日又写信给戴德金，说他已能成功地证明实数的“集体”是不可数的了。这一天可以看成是集合论的诞生日。戴德金祝贺康托尔取得成功。其间，证

明的意义也越来越清楚。因为康托尔还成功地证明代数数的集合是可数的。所谓代数数就是整系数代数方程的根，例如$\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{5}$分别满足$x^2-2=0$，$x^3-5=0$，所以都是代数数；象π与e不满足任何整系数代数方程，则称为超越数。早在1847年，刘维尔就通过构造的方法（当时大家认为是唯一可接受的方法）证明超越数的存在，也就是具体造出超越数来。可是，康托尔1874年发表的集合论头一篇论文《论所有实代数的集合的一个性质》断言，所有实代数数的集合是可数的，所有实数的集合是不可数的。因此，非代数数的超越数是存在的，并且其总数要比我们熟知的实代数数多得多，也就是说超越数的集合也是不可数的。康托尔的这种证明是史无前例的。他连一个具体的超越数都没有举出来，就"信口开河"说超越数存在，而且比实代数数的"总数"多得多，这怎么能不引起当时数学家的怀疑甚至愤怒呢？

其实，康托尔的著作主要是证明了无穷之间也有差别，既存在可数的无穷，也存在那种像实数集合那样不可数的、具有"连续统的势"的无穷。过去数学家认为靠得住的只有有限，而无穷最多只是模模糊糊的一个记号∞。而康托尔把无穷分成许许

多多“层次”，这真有点太玄乎了。

1878年，康托尔发表了集合论第二篇文章，其中把隐含在1847年文章中的“一一对应”概念提出来作为判断两个集合相同或不同的基础。这是最原始的等价观念。而两个集合相互之间能够一一对应就称为等势。势的概念于是应运而生。

从1879年到1884年康托尔发表了题为“论无穷线性点集”的一系列文章，共有六篇。这些文章奠定了新集合论的基础。特别是在1883年的文章中引进生成新的超穷数概念，并且提出了所谓连续统假设，即可数基数后面紧接着就是实数基数。他相信这个假设正确，但没能证明。这个假设对于二十世纪数学基础的发展起着极其重大的作用。

康托尔最后的集合论著作是1895年和1897年发表的两篇文章，其中最重要的是引进“序型”的概念，并定义相应的序数。这个时期，反对集合论的势力逐渐削弱，但是，集合论的内在矛盾已经暴露出来。康托尔自己最早发现集合论的内在矛盾。他在1895年文章中遗留下两大问题未解决：一个是连续统假设，另一个是所有超穷基数的可比较性。他虽然认为无穷基数有最小数但没有最大数，但没有明显叙述其矛盾之处。第一个发表集合论悖论的是

意大利数学家布拉里-福蒂（C. Burali-Forti, 1861—1931）他指出所有序数的集合这个概念的内在矛盾，但是当时认为这也许能够补救。一直到1903年罗素发表他的著名悖论，集合论的内在矛盾才突出出来，成为二十世纪集合论和数学基础研究的出发点。

康托尔的集合论是数学上最具有革命性的理论，因此它的发展道路自然很不平坦。在当时，占统治地位的观念是，你要证明什么，你就要具体造出什么来。因此，人们只能从具体的数或形出发，一步一步经过有限多步得出结论来。至于“无穷”的世界，即完全是超乎人的能力之外，决不是人所能掌握和控制得了的。反对集合论最激烈的克洛耐克认为，只有他研究的数论及代数才最可靠。他有一句著名的话：“上帝创造了正整数，其余的是人的工作。”他认为除了由数经过有限多步推出的事实，其他一概无效。他甚至认为圆周率π都不存在，证明π是超越数也毫无意义。当时柏林是世界数学的中心之一，克洛耐克又是柏林学派的领袖人物，因此他对集合论发展的阻碍作用是非常大的。克洛耐克在1891年去世之后，阻力一下子减少了，康托尔发挥出自己的组织才能，积极筹建德国数学联合会

（1891年成立）以及国际数学家大会（1897年第一届大会在苏黎世召开），给集合论获得承认铺平了道路。

另一方面，许多大数学家支持康托尔的集合论。除了戴德金以外，瑞典的数学家米太格-莱夫勒（G. Mittag-Leffler1856—1927）在自己创办的国际性数学杂志“数学学报”（1882年创刊）上，把康托尔集合论的论文译成法文转载，从而大大促进了集合论在国际上的传播。柏林大学教授威尔斯特拉斯也是集合论的同情者。为了捍卫集合论而勇敢战斗的则是希尔伯特。

从此，围绕集合论形成了二十世纪初关于数学基础的大论战。

2.2.2 集合论简介

我们都知道许多集合的例子。比如说，在一间教室里学生的集合，一个平面上所有三角形的集合，数1，2，3，4，5所构成的集合。在最后一个例子中，我们把这个集合用$\{1, 2, 3, 4, 5\}$表示。1，2，3，4，5称为该集合的元素，或说属于该集合，“属于”用$\in$表示，比如$3\in\{1, 2, 3, 4, 5\}$但是$7\notin\{1,2,3,4,5\}$，$\notin$表示“不属于”。

数1，2，3，…称为自然数。我们用N表示所有自然数的集合{1，2，3，…}因此，$3\in N$，$7\in N$；但$-3\notin N$，$2/3\notin N$，$\sqrt{2}\notin N$。

数…－3，－2，－1，0，1，2，3，…称为整数。用Z来表示所有整数的集合{…，－3，－2，－1，0，1，2，3，…}，所以，$2\in Z$，$-3\in Z$，$2/3\notin Z$，$\sqrt{2}\notin Z$等。

同样我们可以定义有理数p/q（$P\in Z$，$q\in N$，且p和q互素）和有理数集合Q。

除了有理数之外还有$\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{5}$，log2，π等数，它们称为无理数，有理数和无理数统称为实数，实数集合用R表示。

定义一个集合也就是讲清楚哪些元素属于这个集合。两个集合A，B只有包含的元素相同时，才称为恒等（或相等），用$A=B$表示。

外延公理　$A=B$　当且仅当A，B具有相同的元素。如果我们用$\forall x$来表示“对于所有的x”，用$\leftrightarrow$来表示“当且仅当”。这样外延公理可以用符号表示

$$A=B\leftrightarrow\forall x\,[x\in A\leftrightarrow x\in B]$$

由这个公理，可知

$$\{3,\ 4,\ 5\}=\{4,\ 3,\ 5\}$$

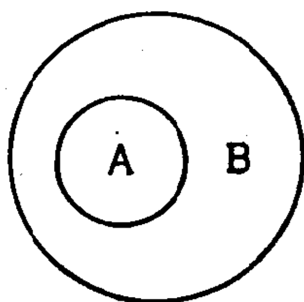
$\{2, 3\} \neq \{3, 4\}$

两个集合A，B可以有彼此无关，有公共元素，和一个包含在另一个之中等关系。如果A包含在B之中我们把A称为B的子集，用$A \subseteq B$表示，用符号表示就是

$$A \subseteq B \leftrightarrow \forall x\ [x \in A \rightarrow x \in B]$$

$[x \in A \rightarrow x \in B]$表示如果$x \in A$则$x \in B$，也就是x是A的元素，则x也是B的元素。

有时$A \subseteq B$也可用图表示：



例如$\{2,3\} \subseteq \{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3,4\}$，$N \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$。

$\subseteq$有下列性质

对于所有集合A，B，C，集合关系$\subseteq$具有下列性质：

（1）$A \subseteq A$

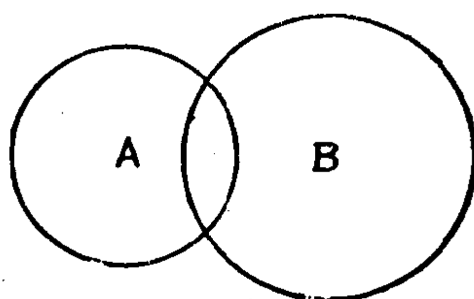
（2）$(A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \rightarrow A = B$

（3）$(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \rightarrow A \subseteq C$

这里面的$\wedge$表示“与”或“且”。

如果$A \subseteq B$且$A \neq B$，那么A就称为B的“真子集”，记作$A \subset B$（或$A \subsetneqq B$，$A \subsetneq B$）。从两个集合A与B可以定义A与B的并集$A \cup B$，A和B的交集$A \cap B$。

定义：$A\cup B:=\{x|x\in A \vee x\in B\}$ 这里面 $\vee$ 表示"或"。并集也就是A中所有元素和B中所有元素合并在一起所成的集合。



A ∪ B

例：$\{1, 2, 3\}\cup\{1,3,5,6\}=\{1,2,3,5,6\}$

$\{1, 2\}\cup\{1, 2\}=\{1, 2\}$

∪可以看成一个运算，具有下列性质：

（1）（幂等性）$A\cup A=A$

（2）（交换性）$A\cup B=B\cup A$

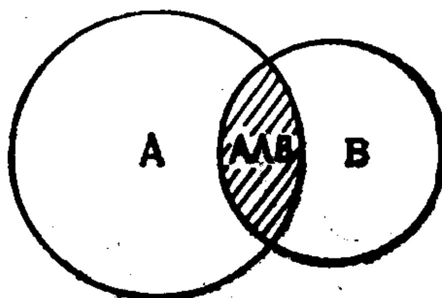
（3）（结合性）$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

（4）　　$A\subseteq B\leftrightarrow A\cup B=B$

A和B的交集表示A与B的公有元素所构成的集合，定义为

$A\cap B:=\{x|x\in A \wedge x\in B\}$

例：$\{1,2,3\}\cap\{2,9\}=\{2\}$



如果两个集合没有公共元素，则交集中一个元素也没有。这种一个元素都没有的集合称为空集，用ϕ 表示。

例：$\{1, 2, 3\} \cap \{6, 9\} = \phi$

对于所有集合A，B，C，$\cap$具有下列性质：

（1）等幂性　$A \cap A = A$

（2）交换性　$A \cap B = B \cap A$

（3）结合性　$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

（4）$A \cap \phi = \phi$

$A \cap B \subseteq A$

$A \cap B \subseteq B$

$A \subseteq B \rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$

$(C \subseteq A \cap C \subseteq B) \leftrightarrow C \subseteq A \cap B$

$A \subseteq B \leftrightarrow A \cap B = A$

对于并集与交集，还满足下列规律：

吸收律：$A \cap (A \cup B) = A$

$A \cup (A \cap B) = A$

分配律：$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

这里我们必须注意区别开$\in$和$\subseteq$。$\in$表示元素和集合的关系，如个人与集体，人与人类的关系，而$\subseteq$表示两个集合之间的关系，如班级与学校，亚

洲人与人类的关系。可是元素不一定限于“个体”，也可以是集合，在数学上，可以把直线看成是点的集合。我们在研究平面上某些直线的集合，当然也可以把它们看成点集合的集合。反过来，集合也有由一个元素构成的，例如$\{3\}$，但是在研究具体集合时，一定要区别开元素与集合，3与集合$\{3\}$。

例如$\{0, 1\}$是具有两个元素0与1的集合，而$\{\{0, 1\}\}$是只有一个元素$\{0, 1\}$的集合；

N是具有无穷多个元素的集合，而$\{N\}$是只有一个元素N的集合。

$\{2\}\in\{\{2\},3\}$，但$\{2\}\not\subseteq\{\{2\},3\}$，$\{2,3\}\subseteq\{1,2,3\}$，但$\{2,3\}\notin\{1, 2, 3\}$。

这样，我们不仅能定义元素的集合，还可以定义集合的集合，集合的集合的集合，等等。对于任何一个集合A，我们能定义它的所有子集合所构成的集合，这个子集合的集合称为A的幂集合，用P(A)表示。例如

1. ϕ只有一个子集合，即ϕ本身，所以$P(\phi)=\{\phi\}$；

2. 一个元素的集合有两个子集，即ϕ和$\{a\}$，所以$P(\{a\})=\{\phi, \{a\}\}$是个两元素的集合；

3. 二个元素的集合有四个子集，ϕ，$\{a\}$，

{b}，{a, b}，所以$P(\{a, b\}) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$是四个元素的集合；

4. 三个元素的集合{a, b, c}有八个子集；

从这些例子可以看出，一个有n个元素的集合，共有2^n个子集合。

幂集合有下列性质

(1) $A \subseteq B \to P(A) \subseteq P(B)$

(2) $P(A) \subseteq P(B) \to A \subseteq B$

(3) $P(A) = P(B) \to A = B$

(4) $P(A) \in P(B) \to A \in B$

注意(4)的逆不成立。即如$A \in B$，不一定$P(A) \in P(B)$，可以举一个反例，设$A := \{\phi\}$，$B := \{\{\phi\}\}$，则$P(A) = \{\phi, \{\phi\}\}$，$P(B) = \{\phi, \{\phi\}\}$，因此，虽然$A \in B$，但$P(A) \notin P(B)$。

(5) $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$

(6) $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$

注意=不总成立。

有了P(A)之后，当然还可以重复这个步骤造出P(P(A))，P(P(P(A)))，……我们不妨把它们简化为PP(A)，PPP(A)，……或者简化为$P^2(A)$，$P^3(A)$，……。

例如，$\{\{2,3\},\{4\}\}\in P^2(N)$

$\{\{5,8,7\},\{7\}\in P^2(N)$

$\{\{\{2,3\},\{4\}\},\{\{5,8,7,\},\{7\}\}\in P^3(N)$。

各集合之间可以通过“映射”彼此发生关系。映射是函数概念的推广。通常的函数$y=x^2$表示实数集合R到实数集合R的一个对应。对于每个x值，都有唯一的y值与之相应。例如，x取0，1，2,3，4，5……等值，y就得0，1，4，9，16，25，…等值，也就是把1映射到1，2映射到4，3映射到9，…

$$\begin{matrix} 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 0, & 1, & 4, & 9, & 16, & 25, & 36, & \cdots \end{matrix}$$

这好像照像一样，y的值称为是x值的象。这样的函数关系可以推广到任意集合上，这时称为映射。比如整数集合$\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$可以映射到偶数集合$\{\cdots-4,-2,0,2,4,\cdots\}$上（记做$F_1$），也可以映射到整数集合$\{\cdots,2,1,0,-1-2,\cdots\}$上（记做$F_2$）。

设F是集合X到集合Y中的映射，对于X的任何子集A，A的元素在F之下的象构成Y的一个子集，称为A在F之下的象，记做F（A）。反过来，Y的任何一个元素y如果是x中某些元素X在F下的象，

称x为y的原象或逆象。同样Y的任何子集B，如果其元素的原象集合是A，则A称为B在F下的原象，记做$A=F^{-1}(B)$。

设F是集合X到集合Y中的映射，如果Y的每一个元素y都至少是x中一个元素的象，就称F是满映射（也称映上）。假如一个象点，原象只有唯一元素，就称F是单映射。如果F既是满映射，又是单映射，则称F是双映射(从集合来讲是一一对应)。例如整数集合Z到整数集合Z的映射F可以有不同的情况：如$F=F_1$，即把每个整数加倍，则每一象点只有唯一原象，所以F_1是单映射，显然F_1的象只是Z的一部分，所以不是满映射。但如$F=F_2$，即把每个整数映射成它的负数，那么正数映射成负数，负数映射成正数，零仍映射到零。不难看出，F_2既是满映射，又是单映射，所以是双映射。

有了映射的概念之后，我们不难区别有限集合和无穷集合。戴德金指出，有限集合不能通过单映射映射到自己的真子集合，而无穷集合却可以通过单映射映到自己的真子集合。例如，上面讲到的F_1，整数集合可以映入偶数集合。而偶数集合显然是整数集合的真子集合。有限和无穷的这个特点可以从下面的小故事反映出来，这个故事据说是希尔伯特

说的。

某一个市镇X，只有一家旅馆，这个旅馆与通常旅馆没有不同，只是房间数不是有限而是无穷多间，房间号码为1，2，3，4，…我们不妨管它叫希尔伯特旅馆。这种可排成一列的无穷集，{1，2，3，4，…}称为可数无穷集。有一天开大会，所有房间都住满了。后来来了一位客人，坚持要住房间。旅馆老板于是引用“旅馆公理”说：“满了就是满了，非常对不起！”正好这时候，聪明的旅馆老板的女儿来了，她看见客人和她爸爸都很着急，就说：“这好办，请每位顾客都搬一下，从这间房搬到下一间”。于是1号房间的客人搬到2号房间，2号房间的客人搬到3号房间……依此类推。最后1号房间空出来，请这位迟到的客人住下了。

第二天，希尔伯特旅馆又来了一个庞大的代表团要求住旅馆，他们声称有可数无穷多位代表一定要住，这又把旅馆经理难住了。老板的女儿再一次来解围，她说：“您让1号房间客人搬到2号，2号房间客人搬到4号，…，k号房间客人搬到2k号，…，这样，1号，3号，5号，…房间就都空出来了，代表团的代表都能住下了。”

过一天，这个代表团每位代表又出新花招，他们想每个人占可数无穷多间房来安排他们的亲戚朋友，这回不仅把老板难住了，连女儿也被难住了。聪明的女儿想了很久，终于想出了办法。你知道她是怎么办的呢？她安排 N×N→N的一个映射。她把第一个客人的第一间房记做（1，1），第二间房记做（1，2），第k间房记做（1，k），…，第二个客人的第一间房记做（2，1），第二间房记做（2，2），…，第m客人第n间房记做（m，n），…，这样就有一串两个号码的房间。现在把它按1，2，3，4，…排好，画出下面一张图：

（1，1），→（1，2），（1，3），→（1，4） …
（2，1），（2，2），（2，3），（2，4），…
↓
（3，1），（3，2），（3，3），…
（4，1），（4，2），（4，3），…
↓
（5，1）…
……

按照箭头的顺序排号：（1，1）住1号，（1，2）住2号，（2，1）住3号，（3，1）住4号，（2，2）住5号，…问题不就又解决了吗？

希尔伯特旅馆越来越繁荣，来多少客人都难不倒聪明的老板女儿。后来女儿进了大学数学系。有一

天，康托尔教授来上课，他问：“要是区间〔0，1〕上每一点都占一个房间，是不是还能安排？”

她绞尽脑汁，要想安排下，终于失败了。康托尔教授告诉她，用对角线方法证明一切想安排下的方案都是行不通的。

假设〔0，1〕区间中的实数都可以按照顺序排起来，因为〔0，1〕区间的实数可以用0、$a_1a_2a_3\cdots$小数来表示，我们把〔0，1〕区间中的所有实数都按照顺序排起来：

第1个　$0.a_{11}a_{12}a_{13}\cdots$

第2个　$0.a_{21}a_{22}a_{23}\cdots$

……

第k个　$0.a_{k1}a_{k2}a_{k3}\cdots$

……

现在我们选一个实数$z=0.b_1b_2b_3\cdots$，定义

$$b_k=\begin{cases}9, & 如a_{kk}=1\\1, & 如a_{kk}\neq 1\end{cases}$$

显然z不等于上面任何一个数，因为至少第k位$b_k\neq a_{kk}$，同样$b_1\neq a_{11}$，$b_2\neq a_{22}$，…，因此，与上面可数个实数每一个都不同，因此，〔0，1〕区间的实数是不可数的。

由康托尔的定理，可知无穷集合除了可数集合

之外，还有不可数集合，可以证明：不可数集合的元素数目要比可数集合元素数目多得多。为了表示元素数目的多少，我们引进"基数"也称"势"的概念。这个概念是自然数的自然推广。自然数3是所有三个元素的集合的共同性质，可以与自然数集合N一一对应的所有集合的共同性质是它们都具有相同的数目，这是最小的无穷基数记做 ω。（ω是希伯来文字母第一个，读做阿列夫），同样，连续统（所有实数或〔0，1〕区间内的所有实数集合）的基数是C。

一一对应反映两个集合的等价关系，显然两集合等价当且仅当它们的基数相等。一个集合与它的幂集合P（S）不能成一一对应，所以S的基数 <P（S）的基数。康托尔还进一步证明，$C=2^{\omega_0}$，且 $C>\omega_0$，问题是C是否紧跟着 ω_0 的第二个无穷基数呢？这就是所谓连续统假设。为了进一步研究基数，我们还必须引进序型及序数。

序关系是从实数集合R中任何两个实数都可以比较大小而来的。对于一般集合，这种关系未必存在。实数集合R中任意两个元素x、y存在≤这样的序关系，或者x≤y或者y≤x而且≤关系满足：

公理1（反身性）对任何元素恒有x≤x；

公理2（传递性）由$x \leqslant y$，$y \leqslant z$，可以推出

$x \leqslant z$；

公理3（反对称性）由$x \leqslant y$，$y \leqslant x$，可以

推出$x = y$。

我们把满足公理1，2，3的二元素之间的关系称为偏序关系。

因此任何集合x，如果其一部分元素之间可以定义偏序关系，则称为偏序集合，也就是这个集合有了偏序结构。假如一个偏序集合还满足公理4，即任何两个元素恒有$x \leqslant y$或者$y \leqslant x$，这就称为全序集合。

例1，所有自然数有自然的大小顺序，显然满足公理1，2，3，而且还满足公理4，因此自然数集合N是全序集合。

2，自然数集合除了上述的序关系之外，还可以有别的偏序关系，比如说$x \leqslant y$定义为x可整除y，在这种意义之下N成为偏序集合，但显然不是全序集合。

3、任何集合的所有子集构成子集族，按照包含关系构成偏序集合，也就是把$\leqslant$看成是$\subseteq$。因为两个子集可以互相不包含，所以这个偏序关系也不是全序关系。

由这些例子可以看出，任何有限集和可数无穷集都是全序集合。而且，任何有限集合按全序关系排列总是有头有尾，但是，可数无穷集合的全序关系可以多种多样，比如以自然数集合N为例：

1，2，3，……

……，3，2，1

1，3，5，……，2，4，6，……

1，3，5，…，…，6，4，2，

…，5，3，1，2，4，6，……

…，5，3，1，…，6，4，2，

两个全序集合虽然基数相同，它们排列形式不一样，我们把形式一样的集合称为序型相同，也就是两个集合的一一对应的映射仍然保持顺序关系，即大的映到大的，小的映到小的。

例如：

1，3，5，……2，4，6，……

↓　↓　↓　　↓　↓　↓

与2，4，6，……1，3，5，……

的序型是相同的。全序集按照序型可以分成等价类，它们的共同特性就是序数。因为有限集合的序型不管怎样排都是一样的，它们的序数就用它们的基数来表示，即0，1，2，3，…，这些序数称

为一级序数。自然数按正常顺序的序型1，2，3，…，序数为ω，然后依次为

$\omega+1$，1，2，3，…，1

$\omega+2$，1，2，3，…，1，2

……

$\omega+\omega=\omega2$　1，3，5，…，2，4，6，…

$\omega2+1$　1，3，5，…，2，4，6，…，1

……

$\omega3$，1，4，7，…2，5，8…，3，6，9，…，

……

$\omega\cdot\omega=\omega^2$，1，2，3，…，2，4，6…，3，6，9，…，k，2k，3k，……

ω^3……

……

ω^ω，这里我们只考虑良序集，也就是有第一个元素的集合，这些都是基数为ω_0的集合的序数。这些序数的集合应该有一个基数，这个集合不可数，所以基数ω_1是ω_0的后继者。然后我们再把基数为ω_1的良序集合的序数按顺序排列，这样就可以得到序数集合，其基数为ω_2，于是基数和序数集合交替地无限增长上去。

这样，序数序列的可按照递增顺序排列如下：

$0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \omega,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \cdots,\ \omega 2,$
$\omega 2+1,\ \omega 2+2,\ \cdots,\ \omega 3,\ \omega 3+1,\ \cdots,\ \omega 4,$
$\cdots,$

$\cdots,\ \omega^2,\ \omega^2+1,\ \omega^2+2,\ \cdots,\ \omega^2+\omega,\ \omega^2+\omega+1,\ \omega^2+\omega+2,\ \cdots,\ \omega^2+\omega 2,\ \omega^2+\omega 2+1,\cdots,\ \omega^2+\omega 3,\ \cdots,\ \omega^2+\omega 4,\ \cdots,\ \omega^2 2,\ \omega^2 2+1,\ \cdots,\ \omega^2 3,\ \cdots,\ \omega^2 4,\ \cdots\omega^3,\ \cdots,\ \cdots,\ \omega^4,\ \cdots,\ \omega^\omega,\ \cdots,\ \omega^{(\omega^\omega)},\ \cdots,\ \omega^{\omega^{(\omega^\omega)}},\ \cdots,$

$\varepsilon_0,\ \varepsilon_0+1,\ \varepsilon_0+2,\ \cdots,\ \varepsilon_0 2,\ \cdots,\ \varepsilon_0\omega,\ \cdots,\ \varepsilon_0\omega^\omega,\ \cdots\varepsilon_0{}^2,\ \cdots$

随着基数序列随之按照递增顺序排列如下：

$\omega_0,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \cdots,\ \omega_\omega,\ \omega_{\omega+1},\ \cdots,\ \omega_{\omega 2},\ \cdots$

2-3 数学的公理化

十九世纪末到二十世纪初，数学已发展成为一门庞大的学科。经典的数学部门已经建立起完整的体系：数论、代数学，几何学，数学分析。数学家开始探讨一些基础的问题，什么是数？什么是曲线？什么是积分？什么是函数？另外，怎样处理这些概念和体系也是问题。经典的方法一共有两类。

一类是老的公理化方法，非欧几何学的发展，各种几何学的发展暴露出它的许多毛病。另一类是构造方法或生成方法，这个办法往往有局限性，许多问题的解决不能靠构造。尤其是涉及无穷的许多问题往往靠逻辑，靠反证法，甚至靠直观。但是，哪些靠得住，哪些靠不住，不加分析也是无法断定的。对于基础概念的分析研究产生一系列新领域——抽象代数学、拓扑学、泛函分析、测度论、积分论。而在方法上的完善，则是新公理化方法的建立，这是希尔伯特在1899年首先在《几何学基础》中做出的。

2.3.1 初等几何学的公理化

十九世纪八十年代非欧几何学得到了普遍承认之后，开始了对于几何学基础的探讨。当时已经非常清楚，欧几里得体系的毛病很多：

1. 欧几里得几何学原始定义中的点、线、面等不是定义。

2. 欧几里得几何学运用许多直观的概念，如“介于…之间”等没有严格的定义。

3. 对于公理系统的独立性、无矛盾性、完备性没有证明。

在八十年代，德国数学家巴士（M. Pasch，1843—1930）提出一套公理系统，提出次序公理等重要概念，不过他的体系中有的公理不必要，有的必要的公理又没有，公理系统不够完美。而且他也没有系统的公理化思想，他的目的是在其他方面——想通过理想元素的引进，把度量几何包括在射影几何之中。

八十年代末期起，皮亚诺和他的学生们也进行了一系列研究。皮亚诺的公理系统有局限性；他的学生皮埃利（M. Pieri，1860—1913）的“作为演绎系统的几何学”（1899），由于基本概念太少（只有“点”和“运动”）而把必要的定义和公理弄得极为复杂，以致整个系统的逻辑关系极为混乱。

希尔伯特的《几何学基础》的出版，标志着数学公理化新时期的到来。希尔伯特的公理系统是其后一切公理化的楷模。希尔伯特的公理化思想极深刻地影响其后数学基础的发展，他这部著作重版多次，已经成为一本广为流传的经典文献了。

希尔伯特的公理系统与欧几里得及其后任何公理系统的不同之处，在于他没有原始的定义，定义通过公理反映出来。这种思想他在1891年就有所透

露。他说，“我们可以用桌子、椅子、啤酒杯来代替点、线、面。”当然，他的意思不是说几何学研究桌、椅、啤酒杯，而是在几何学中，点、线、面的直观意义要抛掉，应该研究的只是它们之间的关系，关系由公理来体现。几何学是对空间进行逻辑分析，而不诉诸直观。

希尔伯特的公理系统是一套公理，他把它们分为五组：

第一组1—8　　关联公理（从属公理）

第二组1—4　　次序公理

第三组1—5　　全合公理

第四组　　　　平行公理

第五组1—2　　连续公理

一共20个公理。

希尔伯特在建立公理系统之后，首要任务是证明公理系统的无矛盾性。这个要求很自然，否则就会从这个公理系统中推出相互矛盾的结果来，从而使公理系统毫无价值。希尔伯特在《几何学基础》第二章中证明了他的公理系统的无矛盾性。这次，他不能象非欧几何那样提出欧氏模型，他提出的是算术模型。实际上，由解析几何把点解释为三数组（可以理解为坐标（x、y、z）），直线表示为方

程，这样得到的解释，不难证明满足所有20个公理。因此，公理的推论若出现矛盾，则必定在实数域的算术中表现出来。这就把几何学公理的无矛盾性变成实数算术的无矛盾性。

其次希尔伯特考虑了公理系统的独立性，也就是说公理没有多余的。一个公理如果由其他公理不能推出它来，它对其他公理是独立的。假如把它从公理系统中删除，那么有些结论就要受到影响。希尔伯特证明独立性的方法是建造模型，使其中除了要证明的公理（比如说平行公理）之外其余的公理均成立，而且该公理的否定也成立。

由于这些公理的独立性和无矛盾性，因此可以增减公理或使其中公理变为否定，并由此得出新的几何学。比如平行公理换成其否定就得到非欧几何学；阿基米德公理（大意是一个短线段经过有限次重复之后，总可以超出任意长的线段）换成非阿基米德的公理就得到非阿基米德几何学。希尔伯特在书中详尽地讨论了非阿基米德几何学的种种性质。

希尔伯特对初等几何公理的无矛盾性是相对于实数的无矛盾性，因此自然要进一步考虑实数系的公理化及其无矛盾性。于是首当其冲的问题是算术的公理化。

2.3.2 算术的公理化

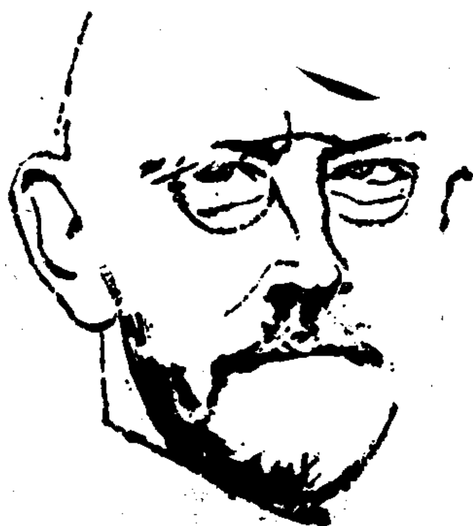


图3 D、希尔伯特
(1862—1943)

数学，顾名思义是一门研究数的科学。自然数和它的计算——算术是数学最明显的出发点。历史上不少人认为，所有经典数学都可以从自然数推导出来。可是，一直到十九世纪末，却很少有人解释过什么是数？什么是0？什大是1？这些概念被认为是最基本的概念，它们是不是还能进一步分析，这是一些数学家关心的问题，因为一旦算术有一个基础，其他数学部门也就可以安安稳稳建立在算术的基础上。

什么东西可以做为算术的基础呢？在历史上有三种办法？

1. 康托尔的基数序数理论，他把自然数建立在集合论的基础上，并把自然数向无穷推广。

2. 弗雷格和罗素把数完全通过逻辑词汇来定义，把算术建立在纯逻辑的基础上。

3．用公理化的方法通过数本身的性质来定义，其中特别有名的是皮亚诺公理。在皮亚诺之前，有戴德金的公理化定义。他的方法是准备向有理数、实数方面推广，为数学分析奠定基础。他们也都注意到逻辑是基础，但都有非逻辑公理。1888年戴德金发表《什么是数，什么是数的目的？》一文，阐述他的数学观点。他把算术（代数、分析）看成逻辑的一部分，数的概念完全不依赖人对空间时间的表象或直觉。他说“数是人类心灵的自由创造，它们做为一个工具，能使得许许多多事物能更容易、更精确地被掌握。”而创造的方法正是通过逻辑。他的定义是纯逻辑概念——类（System），类的并与交，类之间的映射，相似映射（不同元素映到不同元素），等等。他定义无穷类为存在一个映射到真子类的相似映射。他定义一类N为单无穷，如存在N到N的映射φ，和一个元素1，使得：

（α）　$\varphi(N) \subset N$

（β）　$N_0 = 1$

（γ）　$1 \notin \varphi(N)$

（δ）　φ是相似映射。

然后戴德金通过一个映射φ，定义一个次序（即x对应于φ（x）…，这样在N中有一个次序，x，φ

（x），φ（φ（x）），…，φ（x）是x的后继）。这样我们可以把自然数看成抽象的有序单无穷类。通过公理定义，他证明数学归纳法。但是他没有能够直接从纯逻辑名词来定义数。

1889年，皮亚诺发表他的《算术原理：新的论述方法》，其中明显地做了两件事：第一，把算术明显地建立在几条公理之上；第二，公理都用新的符号来表达。

在九条公理中，有四条是关于相等的，其他五条是：

（1） 1是一个数。

（2） 任何数的后继也是一个数。

（3） 没有两个数具有相同的后继。

（4） 1 不是任何数的后继。

（5） 任何性质，如果1具有而且任何数的后继也具有的话，则所有数都具有此性质。

后来皮亚诺刻划数列也同弗雷格一样是从 0开始，但是他对数的概念也同戴德金一样，是考虑序数。他的公理与戴德金的公理有如下的对应关系：

（2）$\longleftrightarrow \alpha$

（3）$\longleftrightarrow \delta$

（4）$\longleftrightarrow \gamma$

$(1)+(5) \longleftrightarrow \beta$

他的五条公理是彼此独立的。

皮亚诺的兴趣主要在于清楚地表述数学结果，他编制的数理逻辑符号（1894年发表于《数学论集》）也主要是如此，而不是为了哲学分析。1900年罗素从皮亚诺学习这套符号之后，才对逻辑、哲学同时也对数学产生了巨大冲击。

从1894年到1908年，皮亚诺出版《数学论集》的五次续集，每一次都把他的五个公理（只是用0代1）作为算术的基础。但是，皮亚诺除了逻辑符号之外，还有其他三个基本符号，即：数、零、后继。因此，他还不象弗雷格及罗素那样把数完全建立在逻辑基础上。

他的公理系统也是有毛病的。特别是第五公理，涉及所有性质，因此须要对性质或集合有所证明。有人把它改为可数条公理的序列，这样一来，由公理系所定义的就不单纯是自然数了。斯科兰姆在1934年证明，存在皮亚诺公理系统的非标准模型，这样就破坏了公理系统的范畴性。

最后我们可以把算术的完整系统总结如下：

自然数论　G·皮亚诺的自然数论是公理化的自然数论（PA）中最基本的，它的定义如下：

（1）原始记号：x，0，=，′，+，·，¬，∧，∀，1，（，）。

（2）规则：构造、真理及推理等各规则。

（3）公理：

Ⅰ、关于数理逻辑的公理：见41—42页

Ⅱ、关于相等的公理：

$$\begin{cases}(1)\ a=a \\ (2)\ a=b\Rightarrow\big(F(a)\Rightarrow F(b)\big)\end{cases}$$

Ⅲ、关于自然数的公理

（1）$a'=b'\longrightarrow a=b$

（2）$\neg a'=0$

（3）$a+0=a$

（4）$a+b'=(a+b)'$

（5）$a0=0$

（6）$ab'=ab+a$

（7）$(A)(o)\sqcap(\forall n(A(n)\longrightarrow A(n'))\longrightarrow A(n)$。

这个自然数论的无矛盾性从有限主义的立场不能证明，但是如下面将要讲到的，甘岑（G·Gentzen 1909—1945）利用超限归纳法证明其无矛盾性。

2.3.3 其他数学对象的公理化

在十九世纪末到二十世纪初的公理化浪潮中，一系列数学对象进行了公理化。这些公理化一般在数学中进行。例如由于解代数方程而引进的域及群的概念，在当时都是十分具体的，如置换群。只有到十九世纪后半叶，才逐步有了抽象群的概念并用公理刻划它。群的公理由四条组成，即封闭性公理，两个元素相加（或相乘）仍对应唯一的元素，运算满足结合律，有零元素及逆元素存在。群在数学中是无处不在的，但是抽象群的研究一直到十九世纪末才开始。当然，它与数理逻辑有密切的关系。

有理数集体、实数集体、复数集体构成抽象域的具体模型，域的公理很多，我们下面只举在数理逻辑中有意义的实闭域为代表：

实闭域理论 塔尔斯基（A. Tarski, 1902—1983）公理化集合论（ZF）与公理化的自然数论（PA）从有限主义的立场，都不能证明其无矛盾性，但是如下定义的实闭域理论，是无矛盾的，且具有各种重要性质

（1） 原始记号：x，0，1，−1，=，<，+，′，¬，/，∀，1，（’）。

（2） 规则：构造、真理及推理等各规则。

（3） 公理：

Ⅰ、关于数理逻辑的公理：同前。

Ⅱ、关于相等性的公理：同前。

Ⅲ、关于实闭域的公理

（1） $(a+b)+c=a+(b+c)$,

（2） $a+0=a$

（3） $a+(-1)a=0$

（4） $a+b=b+a$

（5） $(ab)c=a(bc)$

（6） $a1=a$

（7） $\neg a=0\rightarrow(\exists b)(ab=1)$,

（8） $ab=ba$,

（9） $a(b+c)=ab+ac$,

（10） $\neg 0=1$,

（11） $\neg(a<a)$,

（12） $(a<b\rightarrow b<c)\rightarrow a<c$,

（13） $a<b\vee a=b\vee b<a$,

（14） $a<b\rightarrow a+c<b+c$,

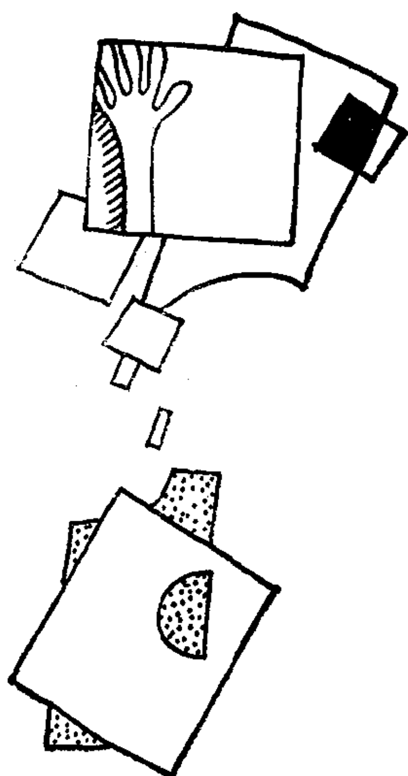
（15） $(0<a\rightarrow 0<b)\rightarrow 0<ab$,

（16） $0<a\rightarrow(\exists b)(ab=a)$,

（17） $(\exists a)(Pn(a)=0)$（其中 n为奇

数，Pn为实系数n次方程，与a
无关）。

另外，环，偏序集合，全序集合，格，布尔代数，都已经公理化。另一大类结构是拓朴结构，拓朴空间在1914年到1922年也得到公理化，泛函分析中的希尔伯特空间，巴拿赫空间也在二十年代完成公理化，成为二十世纪抽象数学研究的出发点。在模型论中，这些数学结构成为逻辑语句构成理论的模型。



3. 悖论及其解决方案

3-1 一连串的悖论的出现：

罗素的悖论以其简单明确震动了整个数学界，造成第三次数学危机。但是，罗素悖论并不是头一个悖论。老的不说，在罗素之前不久，康托尔和布拉里·福蒂已经发现集合论中的矛盾。罗素悖论发表之后，更出现了一连串的逻辑悖论。这些悖论使人联想到古代的说谎者悖论。即“我正在说谎”，“这句话是谎话”等。这些悖论合在一起，造成极大问题，促使大家都去关心如何解决这些悖论。

头一个发表的悖论是布拉里·福蒂悖论，这个悖论是说，序数按照它们的自然顺序，形成一个良序集。这个良序集合根据定义也有一个序数Ω，这个序数Ω由定义应该属于这个良序集。可是由序数

的定义，序数序列中任何一段的序数要大于这段之内的任何序数，因此，Ω应该比任何序数都大，从而又不属于Ω。这是布拉里·福蒂1897年3月28日在巴洛摩数学会上宣读的一篇文章里提出的。这是头一个发表的近代悖论，它引起了数学界的兴趣，并导致了以后许多年的热烈讨论。有几十篇文章讨论悖论问题，极大地推动了对集合论基础的重新审查。

布拉里·福蒂本人认为这个矛盾证明了这个序数的自然顺序只是一个偏序，这与康托尔在几个月以前证明的结果序数集合是全序相矛盾，后来布拉里·福蒂在这方面并没有做工作。罗素在他的《数学的原理》中认为，序数集虽然是全序，但并非良序，不过这种说法靠不住，因为任何给定序数的初始一段都是良序的。法国逻辑学家茹尔丹（P.E.B.Jourdain，1879—1919）找到一条出路，他区分了相容集和不相容集。这种区分实际上康托尔已经私下用了许多年了。不久之后，罗素在1905年一篇文章中对于序数集的存在性提出了疑问，策梅罗也有同样的想法，后来的许多人在这个领域都持有同样的想法。布拉里·福蒂文章中对良序集有一个错误的概念，这个概念是康托尔1883年引进来的，

但一直没有受到什么重视。1887年8月，在布拉里·福蒂的文章发表以后，阿达马在第一次国际数学家大会上仍然给出了一个错误的良序集的定义。因为布拉里·福蒂所考虑的关于良序集的概念太弱了，他不得不引进自己的完全序。这两个概念并不一致，每一个良序集是完全序集，但是反过来不对。布拉里·福蒂很快就认识到他的错误，他在1897年10月的一篇文章中指出这两个概念的不同，但是他没有重新检查自己的证明。一直到1906年初他给库图拉（L.Couturat，1868—1914）的一封信中，他似乎还认为：一旦良序集和完全序集的区别被人们认识到，在他的文章中揭示的矛盾就会消除。

康托尔1899年7月28日给戴德金的信中，谈到布拉里·福蒂所提到的矛盾，这个矛盾并没有导致康托尔放弃集合的良序性，而放弃了它的集合性。他把集合分为两类：相容集合和不相容集合，而只把前者叫做集合。这种区分法预示了冯 诺意曼（J.Von Neumann，1903—1957）在1925年引进的集合和类的区别。但是康托尔对于这种区分的判断标准仍然是不精确的。如果我们把一个集体考虑为一个对象而没有矛盾，它是一个集合。这个想法

后来改进为：当一个集体是另一个集体的元素，它是一个集合。这种相容集体和不相容集体的区别早已被施罗得引进来。他认为如果集体的元素彼此是相容的，它是相容的；而如果集体的元素彼此是不相容的，它是不相容的。有趣的是施罗得引进的这种区分和悖论没有关系，因为这种现代形式的悖论当时还不知道。康托尔关于集体的叙述——两个等价的集体或者都是集合，或者都是不相容的，可以看成是取代公理的最早的表述。这个公理是弗兰克尔和斯科兰姆在1922年提出的。

布拉里·福蒂的悖论揭示了康托尔集合论的矛盾。其实，康托尔本人在这之前已经意识到集合论的内在矛盾。他在1899年7月28日给戴德金的信中指出，不能谈论由一切集合构成的集合，否则就会陷入矛盾。这实际上就是罗素悖论的内容。

康托尔的根据就是他的最大基数悖论：

康托尔把一个集合Y的基数定义为与Y能够一一对应的集合X的全体，用$|Y|$表示。我们定义$|Y| \leqslant |Z|$为Y与Z的一个子集合一一对应。如果$|Y| \leqslant |Z|$，且$|Y| \neq |Z|$，则用$|Y| < |Z|$表示。康托尔证明，如果P（Y）是Y的所有子集构成的集合，即Y的幂集，则$|Y| < |P(Y)|$。设（是

所有集合的集合，因此P（C）也是C的子集合，所以$|P(C)| \leqslant |C|$；但是，由康托尔定理，$|C| < |P(C)|$，这就导致矛盾。

康托尔最大基数悖论和布拉里·福蒂悖论到罗素悖论都是集合论悖论，它们直接同康托尔朴素集合论的不严格性有关。毛病出在集合的定义上，也就是任何性质φ就对应一个具有这种性质的集合。这就是所谓内函公理组，用符号表示就是$\exists Y = \{X| \varphi(X)\}$。集合论的这种矛盾必须通过削弱这个错误的公理组才能解决。

罗素的悖论发表之后，接着又发现一系列悖论（后来归入所谓语义悖论）。

1. 理查德(J.Richard，1862—1956)悖论。法国第戎中学教师理查德在1905年发表了一个悖论，大意如下：法语中某些片语表示实数，比如“一个圆的圆周与直径之比”就表示实数π。法语字母也象英语字母一样有一定的顺序，所以我们可以把所有片语按照字母顺序排列，然后按照片语中字母的多少排列，少的在前，多的在后。这样我们把能用片语表达的实数排成一个序列，a_1，a_2，a_3，……。于是就得到了所有能用有限多字（字母）定义的数了。它们构成了一个可数集合E。现在我们

提出一个规则把这个序列改变一下造成一个数来：“设E中第n个数的第n位为p，我们造一个实数如下：其整数部分为0，如果p不是8或9；其第n位小数为p+1，要是p是8或9的话，则第n位变成1。”这个实数显然不属于E，因为它和E中每个数都不一样，要是同a_m相同，应该两数的第m位相同，可是根据我们的造法，它们不一样，所以同E中每个数都不一样。但是它们却可以由上面有限多个字组成的话来表示，因此应该属于E。这就出现矛盾。

理查德提出的悖论是因为看到法国《纯粹科学与应用科学通论》1905年3月30日一期的编者按语而写的。编者谈到，1904年8月在德国海德尔堡召开的国际数学家大会上，德国数学家寇尼格(J. König，1849—1913)证明连续统是不能够良序化的。可是一个月后，德国数学家策梅罗(E. Zermelo，1871—1953)却证明了任何集合都能良序化，理查德从这段话中看到了集合论中存在“某些矛盾”，这些矛盾和良序性和序数的概念有关系，于是他给该刊物编辑部写了一封信，登在1905年6月号上，编者还加了按语。

2. 培里悖论。培里(Perry)是英国的图书馆管理员。有一天他告诉罗素下面的悖论：英语中

只有有限多个音节，只有有限多英语表达式包含少于40个音节，所以，用少于40个音节的表达式表示的正数数目只有有限多个。假设R为不能由少于40个音的英语表达式来表示的最小正整数(The least positive integer which is not denoted by an expression in the English language containing fewer than forty syllables)。但是，这段英语只包含30几个音节，肯定比40个少，而且表示R。这自然产生了矛盾。

3. 格瑞林(Kurt Grelling 1886—1941)和纳尔逊(L. Nelson, 1882—1927)。纳尔逊是新康德主义的小流派之一弗瑞斯派的代表。1908年他和他的学生格瑞林把下面的悖论发表在弗瑞斯派的一个文集上。这个悖论常称为格瑞林悖论。

如果一个形容词所表示的性质适用于这个形容词本身，比如“黑的”两字的确是黑的，那么这个形容词称为自适用的。反之，一个形容词如果不具有自适用的性质，就叫做非自适用的。在英语中：“Polysyllabic”(多音节的)、“English”(英语的)这些词都是自适用的形容词，而“monosyllabic”(单音节的)、“French”(法语的)这些词就是非自适用的。现在我们来考虑“非

自适用的”这个形容词，它是自适用的还是非自适用的呢？如果“非自适用的”是非自适用的，那么它就是自适用的；如果“非自适用的”是自适用的，那么按照这词的意思，则它是非自适用的，这就导出矛盾。

3-2 悖论动摇了整个数学的基础

1900年左右，数学已经发展成为一个庞大的领域了。当时纯数学大致分为算术一代数、几何和数学分析。随着第二次数学危机的解决，数学分析建立在极限理论基础上。而极限理论中，有些基本性质要由“单调有界的数列必有极限”这个定理来证明。这个定理从直观上看尽管很明显，但是追求严密性的数学家很早就要求不靠直观而靠逻辑来证明，要求一切定理都从比较简单的公理推导出来。

要推导极限的性质，必须对数列有明确的概念。这里的数不只是有理数，还包括无理数，这两种数构成实数的集合。所以，当务之急就是建立起严格的“实数”理论。戴德金在1872年发表了《连

续性与无理数》这本专著。同年康托尔也发表实数理论的文章。康托尔通过一定的有理数序列(基本序列)来定义实数。而戴德金则利用有理数集合的分割来定义实数。他们的理论虽然逻辑上可靠,但是都不太自然,依赖于有理数的集合概念。

这样一来,实数理论的无矛盾性就归结为有理数论,进而归结成自然数论的无矛盾性了。

自古以来,大家都认为自然数的算术是天经地义,不容怀疑的。不过有些数学家如弗雷格和戴德金又进一步把自然数归结为逻辑与集合论。这样一来,集合论与逻辑成为整个数学的基础。罗素悖论一出现,集合论靠不住了,自然数的算术也成问题,这样一来,整个数学大厦都动摇了。

无怪乎弗雷格在收到罗素的信之后,在他刚要出版的《算术的基本法则》第二卷末尾写道:“一位科学家不会碰到比这更难堪的事情了,即在工作完成之时,它的基础跨掉了。当本书等待付印的时候,罗素先生的一封信把我置于这种境地。”戴德金原来打算把《连续性及无理数》第三版付印,这时也把稿件抽了回来。他也觉得由于罗素悖论,整个数学的基础都靠不住了。

悖论涉及的是集合、属于、所有(全部)性质

与集合的对应关系、无穷这些最基本的概念。这些概念在数学中是天天必须用到的。如果不加以澄清，在数学证明的过程中，不是这里就是那里就会出毛病。有了毛病，有的人就主张把集合论全盘推倒，只考虑有限的东西，这样不仅把数学内容砍掉了一大半，而且无穷的问题仍会出现。另一部分人则主张限制这些概念的使用范围，当然限制太多了，就缩小了数学领域，而限制太少了又会出现矛盾，所以要在这两者之间找到一种最好的解决办法。从二十世纪初，人们就一直在找，虽然并没有得到最终满意的解决，不过给数学提供一个可靠的基础还是可以办得到的。

3-3 罗素的类型论

1901年6月罗素发现了“悖论”。他在1902年6月16日把这个悖论告诉了弗雷格。他在1903年出版的《数学的原理》中，有一段可能是在1901年写的，他写道：“作为多的类与类的项具有不同的类型”；“整个秘密的关键是逻辑类型的不同。”对这个问题的解决，他只写了不到三十行。他还考查了其他

的解决办法，觉得它们都不令人满意，于是得出结论："没有适当的哲学涉及到上述的矛盾，这些矛盾直接从常识中得出，也只能通过抛弃掉某些常识的假定而解决"。但是在这本书出版之前，罗素感觉到这个题目还应该更加注意，于是他写了大约六页的一个附 录B，"尝试性地提出了类型论"，他要求在回答所有问题之前变成为更加精致的形式。自然，当时罗素已经知道其他的悖论了，例如布拉里·福蒂悖论和最大基数悖论。

大约1905年12月，罗素抛弃了类型论。为了克服由悖论引起的困难，他提出了三种理论：1.曲折理论，命题函数非常简单时才决定类，而当它们复杂时就不能决定类。2.限制大小的理论，不存在象所有实体的类的东西。3.非类理论，类和关系完全都禁用。这篇文章甚至没有提到类 型 论。1906年2月5日，罗素在这篇文章末尾加了一 个 注："通过更进一步的研究，我一点也不怀疑非类理论能够解决本文第一节所陈述的所有困难"。这就是说，能够解决悖论。

非类理论的中心思想是它不讲满足某种给定语句的所有对象的类，而只讲语句本 身和 其 中的代换。于是关于指定类的讨论都可以用语句和代换来

表述。但是当我们讨论一般的类作为可量词化变元的值，如何继续这种讨论就不明显了。在这篇文章中，罗素已经承认对于大部分经典数学来说，非类理论可能证明是不适当的。他在1906年2月加的附注中表现出他对于刚刚抛弃的类型论，又重新燃起希望。果然，他很快就回来进一步细致地研究类型论，并于1906年7月发表论文了。

罗素把悖论加以分析之后，得出结论，认为一切悖论的共同特征是“自我指谓”或自指示，自反性。它们都来源于某种“恶性循环”。这种恶性循环来源于某种不合法的集体（或总体或全体）。这类集体的不合法之处在于，定义它的成员时，要涉及到这个集体的整体。罗素悖论是最明显的例子。定义不属于自身的集合时，涉及到“自身”这个整体。这是不合法的。这种涉及自身的定义称为非直谓定义。所以要避免悖论，只需遵循“（消除）恶性循环原理”，“凡是涉及一个集体的整体的对象，它本身不能是该集体的成员。”根据这个原则，罗素提出他的分支类型论。

罗素把论域分成为等级或者类型，只有当满足某一给定条件的所有对象都属于同一类型时，我们才能谈到他们的全体。于是一个类的所有成员必定

全都具有同一类型。同样，任何一个量词化的变元也必定有同一类型。这样罗素就引导谈论“所有”和“任何”的区别。所有由普遍量词的束缚变元来表示，它们跑遍一个类型；而任何则由自由变元来表示，它们可以指任何不确定的事物，而不管其类型如何。因此自由变元是没有任何妨碍的。

个体称为0级谓词。

谓词的变元如果都是个体，也就是变域是0级谓词，则称为1级谓词。

谓词的变元如果变元都是n级以下的谓词且至少有一个n级谓词就称为n+1级谓词。

但是一个公式包含更多内容，定义稍微复杂一些：一个公式含有n级以下自由变元，n级以下的约束变元，n+1级以下的常谓词（自由谓词变元），且至少有一个变元达到最高值（n或n+1），则公式称为n+1级的。这样考虑约束变元的级就是为遵从恶性循环原则的要求。只有这样才能消除∀A A(A)，之类的公式了。

但是，分支类型论禁例太严，以致无法推出全部数学。为此罗素引进可化归公理：“任何公式都可以和一个直谓公式等价”。也就是都可以化为含n级变元的n+1级公式。这样一来可以不必考虑约

束变元的级了。这种类型论称为简单类型论。

由于集合（“类”）和谓词（“命题函数”）是平行的。我们可以用集合更简单地解释一下：

简单类型论是由一系列层构成的系统，最底一层是第0级，上面各层，各级都是同一类的型构成，最低一层的元素称为个体，由这些个体所成的类就构成第一级的类，由一级的类为元素所成的类就构成第二级的类。依此类推。根据这种类型论，一类的元素都属于一个已知的类型，在A∈B的表示中，B的级总和A的级不同。它们是不同级 的 类，A的级总比B的级低。根据这样规则，A∈A的 表 示是不准许出现的，是没有意义的。

1926年英国年轻数学家拉姆塞（P.F.Ramsey 1903—1930）把 悖 论 区别为逻辑悖论（或谓词悖论、集合论悖论）及语义悖论（或认识论悖论）。他证明对于集合论悖论，简单类型论就足以消除。因为这种悖论只牵涉到谓词和变元的关系，它们不同级便可以消除悖论了。但是语义悖论要涉及到谓词本身，非得分支类型论不可。

虽然类型论可以消除悖论，但是缺点很多，非常烦琐，特别是可化归公理的引进，具有很大的任意性，因此受到很多批评。不过它的历史作用还是

很大的。也借助它，罗素才实现他的逻辑主义纲领，完成前人没有完成的计划。

罗素和怀特海的《数学原理》出版之后，许多人对于其系统进行简化与改进。特别是哥德尔(K。Gödel 1906—1978)及塔尔斯基。1940年，丘奇给简单类型论一个新的表述。类型论至今仍是数理逻辑中主要的系统之一。

3-4 策梅罗的公理集合论

1908年，策梅罗采用把集合论公理化的方法来消除罗素悖论。他的著名论文《关于集合论基础的研究I》是这样开始的："集合论是这样一个数学分支，它的任务就是从数学上以最为简单的方式来研究数、序和函数等基本概念，并借此建立整个算术和分析的逻辑基础；因此构成了数学科学的必不可少的组成部分。但是，在当前，这门学科的存在本身似乎受到某种矛盾或者悖论的威胁。而这些矛盾和悖论似乎是从它的根本原理导出来的。而且一直到现在，还没有找到适当的解决办法。面对着罗素的关于'所有不包含以自己为元素的集合的集

合’的悖论，事实上，它今天似乎不能再容许任何逻辑上可以定义的概念‘集合’或‘类’为其外延。康托尔原来把集合定义为我们直觉或者我们思考的确定的不同的对象做为一个总体。肯定要求加上某种限制，虽然到现在为止还没有成功地用另外同样简单的定义代替它，而不引起任何疑虑。在这种情况下，我们没有别的办法，而只能尝试反其道而行之。也就是从历史上存在的集合论出发，来得出一些原理，而这些原理是作为这门数学学科的基础所要求的。这个问题必须这样地解决。使得这些原理足够地狭窄，足以排除掉所有的矛盾。同时，又要足够地宽广，能够保留这个理论所有有价值的东西。”

在这篇文章中，策梅罗实行的计划，是把集合论变成一个完全抽象的公理化理论。在这样一个公理化理论中，集合这个概念一直不加定义，而它的性质就由公理反映出来。他不说什么是集合，而只讲从数学上怎样来处理它们，他引进七条公理：

1.决定性公理（外延公理）：假如一个集合M的元素同时是一个集合N的元素，反过来，集合N的每个元素也是M的元素，则M＝N。简单来讲，每一个集合由它的元素所决定。

2.初等集合公理（空集公理、单元素公理、对集公理）：存在一个集合“空集”，完全不包括任何元素，用ϕ表示。如果a是任何一个东西，那么就存在一个集合｛a｝，它的元素包含a且只包含a。假如a和b是两个东西，且存在一个集合｛a，b｝，它只包含a和b为它的元素；而不包含不同于a也不同于b的任何其它东西。

3.分离公理：假如命题函数（谓词）E（x）对于一个集合M的所有元素都有定义，则M有一个子集，M包含且仅仅包含M中那些使E(x)为真的元素。

4.幂集公理：每一个集合都对应，另外一个集合（T的幂集），它的元素包含且仅仅包含T的所有子集。

5.并集公理：对于每一个集合T都对立一个集合SUT，它包含且仅仅包含作为S的元素和T的元素为元素。

6.选择公理：如果T是一个集合，它的所有元素都是不同于ϕ的集合，而且其中任何两个都没有共同的元素。则并集SUT至少包含一个子集S，它和T的每一个元素有一个且仅有一个公共元素。

7.无穷公理（稍稍改变一下原来形式），至

少存在一个集合W有如下性质。

a） $\phi \in W$

b） 如$x \in W$，则$\{x\} \in W$。

有了无穷公理，就可以由空集$\varnothing$出发，定义一个集合W_0，其元素为ϕ，$\{\{\phi\}\}$，$\{\{\{\phi\}\}\}\cdots$。显然W_0是无穷集合。其他的无穷集合 可以通过幂集公理来定义。

实际上策梅罗的公理 系统Z（公理1至7）把集合限制得使之不要太大，从而回避了比 如 说 所有“对象”，所有序数等等，从而消除罗素悖论产生的条件。

策梅罗不把集合只简单看成一些集团或集体，它是满足七条公理的条件的“对象”，这样排除了某些不适当的“集合”。特别是产生悖论的原因是定义集合的所谓内函公理组，如今已换成弱得多的分离公理组。

策梅罗首次提出了集合论公理系统，意义是非常重大的。但是，其中有许多缺点和毛病。比如：公理3的确定性质的含义并不清楚，他的公 理没有涉及逻辑基础，选择公理有许多争议等等。后来经许多人加以严格处理及补充，才成为严格的公理系统，即ZF或ZFS系统。其中Z代表策梅 罗，F代表

弗兰克尔，S代表斯科兰姆。这里面特别是斯科兰姆和弗兰克尔的改进。但是一般的ZF中往往不包括选择公理（A C），如果加进选择公理则写为ZFC(AC是Axiom of Choice的缩写，有时简写为C）。



图4 E·策梅罗
（1871—1932）

策梅罗的公理系统Z发表之后，遭到各方面的批评。特别是斯科兰姆1922年在8月份在赫尔辛基召开的第五届斯堪的纳维亚数学家大会上做了公理化集合论的报告，他对策梅罗公理系统提出了八点批评：

1. 为了讨论集合，我们必须从对象“域”B开始，也就是用某种方法构成的域。

2. 策梅罗关于确定的命题要有一个定义使得它精确化。

3. 在所有完全的公理化中，集合论的概念不可避免地是相对的。

4. 策梅罗的公理系统不足以提供通常集合论

的基础。

5。当人们打算证明公理的无矛盾时，由非直谓语句所引起的困难。

6。对象域B的不唯一性。

7。数学归纳法对于抽象给出的公理系统的必要性。

8。选择公理的问题。

另一方面，许多人对策梅罗公理集合论提出许多改进意见。首先Z太狭窄不足以满足对集合论的合法需要，有许多集合不能由它产生出来，也不能够由此造出序数的一般理论和超穷归纳法。为了弥补这个缺陷，弗兰克尔加进一个公理组即公理8—代换公理。另外，弗兰克尔还把公理以符号逻辑表示出来，形成了现在通用的ZF系统。

一般认为经过弗兰克尔改进的策梅罗集合论公理系统加上选择公理是足够数学发展所需的，但是还需要加一条限制性的公理，即除了满足这些公理的集合之外没有其他的集合。采取这样一个公理是出于一个悖论的启发，这个悖论最初是法国数学家米里马诺夫（D。Mirimanoff）在1917年提出的。这个悖论涉及所谓基础集合，它是这样的集合x，其中没有任何集合（不一定都不相同）的序列y：



图5 A.弗兰克尔

（1891—1965）

$y_2 y_3 \cdots\cdots$使得$\cdots\cdots \in y_3 \in y_2 \in y_1 \in x$，设W为所有基础集合的集合。假如W是基础集合，则$W \in W$，因此$\cdots\cdots W \in W \in W$，从而W是非基础集合。假如W不是基础集合，那么根据定义存在一串集合y_1，y_2，y_3，$\cdots\cdots$使得$\cdots\cdots \in y_3 \in y_2 \in y_1 \in W$，因此$y_1$不是基础集合，所以不属于W。为了排除这种集合，冯·诺意曼引进公理 9（基础公理），每一非空集合S包含一个元素t，使得S和t没有公共元素。

由于这条公理，没有集合S包含自己为元素，因为若$S \in S$，则$\{S\}$与公理9矛盾，从而消除了上述悖论。最后我们得到带有互等关系的集合论ZF。

ZF集合论定义如下：

1. 原始记号：$x, \phi, =, \in, \geqslant, \Lambda, V, 1, (,),$

2. 规则：构造，真理及推理等规则。

3. 公理：

Ⅰ、关于数理逻辑的公理：容许应用一阶古典谓词逻辑的公理

Ⅱ、关于相等性的公理

(1)$a = a$，(2)$a = b \Rightarrow (F(a) \Rightarrow F(b))$

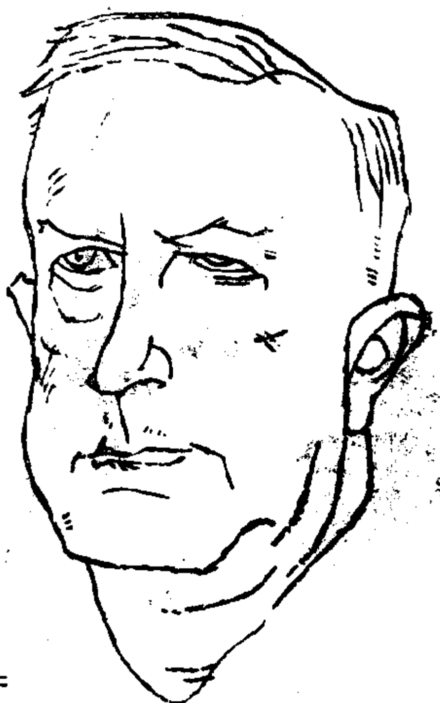


图6T.斯科兰姆（1887—1963）

Ⅲ、关于集合的公理

关于外延、空集、对集、幂集、并集各公理，无穷集合的公理，正则性公理，以及代换公理。

这样定义的集合论（ZF）中，虽说与连续统假设有关的“幂集公理”不留下疑点，但正因为不包含有很多问题的“选择公理（AC）”，所以纯粹性很高。虽然至今还不能给出ZF集合论的无矛盾性的证明。可是它已经没有必须大书特书的难点了。

常用的集合论公理系统除了ZF之外，还有由冯·诺意曼开创并由贝耐斯、哥德尔加以改进、简化的集合论公理系统——NBG系统（有时简称为BG系统，N代表冯·诺意曼，B代表贝耐斯，G代表哥德尔）。



图7冯·诺意曼
（1903—1957）

大数学家冯·诺意曼在他年青的时候，开辟了公理化集合论的第二个系统。他第一个主要的数学研究就是重新考虑策梅罗—弗兰克尔对于集合论的公理化。在他的博士论文中论述了一般集合论的公理构造，这篇论文是他1925年用匈牙利文写的。但是他后来在两篇重要文章中用德文发表了其中主要的思想。一篇是《集合论的一种公理化》，另二篇是《集合论的公理化》。第一篇文章中他给出自己的公理化体系，在第二篇文章中他详细地证明了怎样由他的公理系统导出集合论。冯·诺意曼的处理方法是策梅罗公理化的推广。原来的理论基本上保持了下来，但是形式有所变化。表面看来新公理和

旧公理非常不一样，但是主要是使用的语言有所变化。通常表示集合论的语言有两种，一种是集合和它的元素的语言，一种是函数及其变项的语言，这两种语言是等价的。策梅罗用的主要是集合的语言，不过他也隐含地用函数的语言。而在弗兰克尔改进的理论里，这点就更加明显。冯·诺意曼选用的语言完全与策梅罗相反。他一开始就用变项和函数来叙述他的公理。但是策梅罗—弗兰克尔和冯·诺意曼两个公理系统主要差别还不是语言的问题，而是如何在朴素集合论中排除悖论的方式。在策梅罗—弗兰克尔系统中，是通过限制集合产生的方式来达到这个目的的。他们把集合只限制在对于数学必不可少的那些集合上。但是从冯·诺意曼看来，这样施



图8 贝耐斯

（1888—1977）

加限制有点不必要地过分严格，使得数学家在论证过程中失掉一些有时有用的论证方式。而这些论证方式似乎是没有恶性循环的。于是冯·诺意曼采取一个比策梅罗—弗兰克尔更广的概念，而同时却消除任何产生悖论的危险。按照冯·诺意曼的想法，悖论的产生也许是因为过大的总体所引起，更准确来讲，就相当于所有集合的集合，所以冯·诺意曼就觉得只要不让这类总体不成为元素，就可以避免悖论。

在冯·诺意曼的公理系统中，悖论是通过下面的方法来避免的；承认有两种类型的类，即集合和固有类。集合可以是其他类的成员，而固有类则不容许是其他类的成员。在这个公理系统中，我们就有三个原始概念：集合，类，属于关系。用形式语言来表示就是集变数，类、变数及二元谓词符号∈，所以NBG中的定理不一定是ZF中的定理。不过可以证明ZF中的每个合适公式在ZF中可证明当且仅当在NBG中可证明。这样看来NBG是ZF的一个扩充。数学家可以根据自己不同的需要来选用自己认为方便的公理系统。比如哥德尔是在NBG公理系统中考虑选择公理及广义连续统假设的相对无矛盾性，而科亨则是在ZF公理系统中考虑选择公理

及连续统假设的独立性。除了这两个最重要的集合论公理系统之外，还有好几个公理系统，但是它们的用途远不如ZF和NBG系统了。

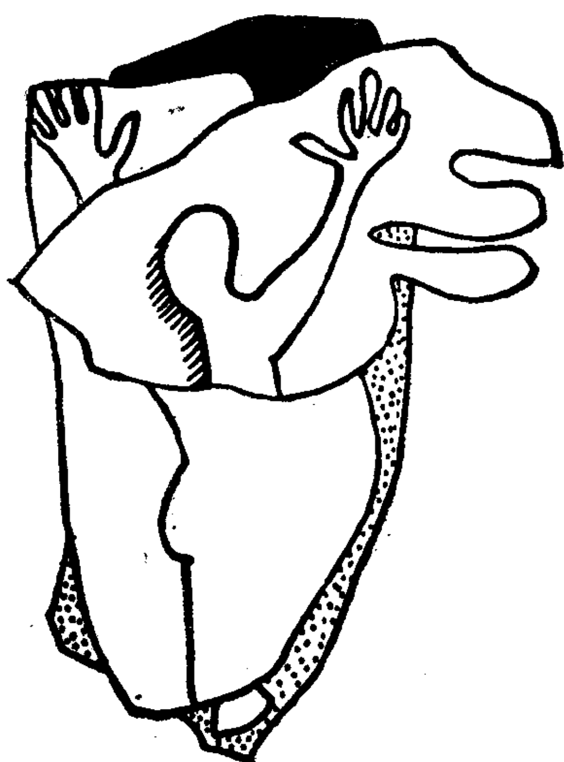
尽管集合论公理系统建立起来，并得到广泛承认，但仍然存在许多问题，例如说：

1. 不可达基数和序数是不是存在？

2. 连续统假设是否能够证明。

3. 公理系统的协调性和独立性。

从三十年代之后，为了解决这些问题，公理集合论掀开新的一页。



4. 哥德尔的发现：意想不到的结果

在数理逻辑的历史上，哥德尔的工作起着承前启后的作用。1928年希尔伯特在意大利波伦那召开的国际数学家大会上提出的四个问题，很快就被哥德尔原则上解决了。尤其是他的不完全性定理，把人们引向一种完全不同的境界，从此数理逻辑开始了一个新的时代。

在这之前，数学家期望数学有一个既广阔又严格的基础，在这个基础上数学家可以放心地去干他们愿意干的事。哥德尔的不完全性定理使这种想法破灭了。悖论所造成的危机虽然可以暂时回避，然而想从原则上一揽子解决是毫无希望的。从此之后，数学家只满足于使用集合论一些最简单的结果，而对更深入的数理逻辑与数学基础问题则不那么关心注意了。同时，由于哥德尔在证明中发展的

一些技术，也使数理逻辑成为一门具有自己独立技术和方法的数学分支。现在的数理逻辑，不管是公理集合论、模型论还是证明论和递归论都已经变得十分专门。就象代数拓扑学、算子代数、随机过程等学科，对于非本行专家来说，简直是难以理解的。

4-1 哥德尔小传

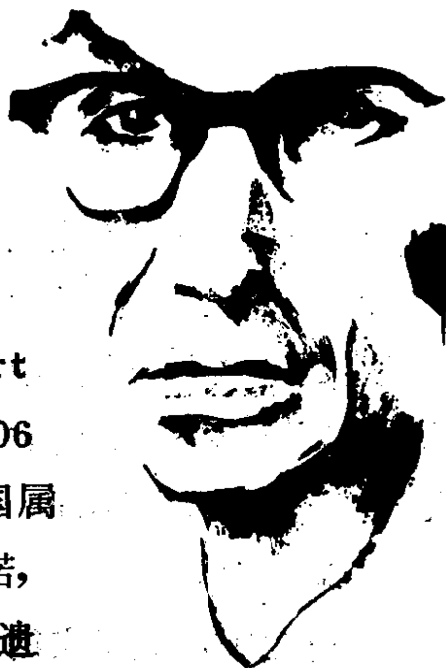


图9 K·哥德尔（1906—1978）

库尔特·哥德尔(Kurt Gödel，1906-1978)于1906年4月28日出生在奥匈帝国属下的布瑞尼(今天的布尔诺，这里出过另一位伟大人物遗传学之父孟德尔)。他的父母是德国人。与一般人推测不同，他并没有犹太血统。他在家乡上了四年国民学校和八年德国国立中学。1924年中学毕业后，他进入维也纳大学哲学系，先是攻读物理，后于1926年 转 而 攻读数学。这恐怕是出于他对精密性和严格性过分偏爱的缘故。当时的维也纳大学有不少有

国际声誉的数学家，如曾解决过希尔伯特的一些猜想的数论专家费特万格勒（Furtwangler，1869—1940），泛函分析的创始人之一哈恩（Hans·Hahn，1879—1934）与拓扑学家门格尔（Karl Menger，1902—）等。大学时他对费特万格勒的数论课很有兴趣，这同他后来的工作有很大关系，比如他应用孙子定理来构造由加法与乘法表出的原始递归函数。

上大学时，他对哲学也很有兴趣，实际上对哲学的探索贯穿着他的一生。他听哲学教授的讲课，特别是经常参加维也纳小组的活动。二十世纪最主要的哲学流派——逻辑实证主义当时刚刚开始他们的事业。哥德尔赞成以施里克（M.Schlick，1882—1936）为首的这个学派的分析方法，即用数理逻辑来对哲学及科学概念进行分析。但是，他也一直不同意他们否定客观实在性及认为形而上学命题是无意义命题等基本观点。不过，他的哲学观点也促使他对于数理逻辑进行深入的钻研。

当时数理逻辑的经典著作是罗素和怀特海的《数学原理》，这三卷满是符号的大书，恐怕只有极少数人读过。1928年，希尔伯特和阿克曼合著的《理论逻辑纲要》出版，这是一本论述简明、清

晰，概括性强的好书，对哥德尔的启发性很大。书中明确提出一个尚未解决的问题——狭义谓词演算的完全性问题。哥德尔很快解决了这个问题，把结果写成博士论文，成为他一生事业的开端。

1929年秋天，他进行答辩。1930年2月得到批准取得博士学位。1930年夏天，哥德尔开始研究希尔伯特计划，他想证明分析的无矛盾性。9月，他到东普鲁士哥尼斯堡去参加科学会会议。许多著名数学家，希尔伯特、冯·诺意曼、海丁、卡尔纳普都参加了这次会议。希尔伯特在会上做了题为“逻辑和对自然的认识”的著名演说。他乐观地宣称：“我们必须知道，我们将会知道”。可是，就在这个会上哥德尔宣布了他的第一不完全性定理。不久，他又证明了第二不完全定理。这个结果毫无疑义对希尔伯特计划是莫大的打击。

1931年他在维也纳大学当助教，这篇文章成为就职论文而受到了很高的评价。从1933年到1938年，他在维也纳大学当讲师。1932年他到过哥丁根，见到过爱米·诺特（Emmy Noether，1882—1935），西格尔（C.L.Siegel1896—1981），甘岑等人。他没见到早逝的天才厄布朗，但他们交换过信件。厄布朗的信中有最早的递归函数想法。但

是厄布朗只收到哥德尔一封信。

1933年到1934年，哥德尔第一次来到普林斯顿大学高等研究院。他在这里见到丘奇，克林（S.C.Kleene，1909—）和罗塞尔（J.B.Rosser，1907—）。他在普林斯顿大学发表了《论形式数学系统的不可判定命题》的演讲，这对后来美国研究递归论是极大的推动。

1937年他在维也纳讲授“公理化集合论”，这时他开始集中力量研究这个题目。在他秋天来到高等研究院时，他已经对选择公理的无矛盾性有所考虑，并把自己的思想同冯·诺意曼交谈过。不过，他的可构造集的思想，广义连续统假设和选择公理与NGB系统的无矛盾性，一直到1938年秋天才在高等研究院讲演，并在1938到1940年发表。这时他已经开始定居美国了。

1938年3月，希特勒兼并奥地利，这时，他刚刚结婚。1939年9月二次大战爆发，他于1939年底横贯苏联的西伯利亚大铁路经日本到了美国，从此再也没有回奥地利。在美国，除了1940年春季在圣母大学任教外，一直在普林斯顿高等研究院工作。由于研究院里有人反对和阻挠，直到1947年他才被批准为常任研究员，1953年才成为教授。对于这

样伟大的数学家来说，得到这种称号的时间实在是太晚了。到这时，他在数理逻辑方面的主要工作都已经完成了，他的兴趣转向其他方面。

1947年到1951年他开始注意和研究广义相对论。他同爱因斯坦是多年老邻居，他们几乎天天一起散步回家。但是哥德尔表示，他对相对论的兴趣并非来自同爱因斯坦的谈话，而是来自对康德时空哲学的兴趣。1950年他在国际数学家大会上做的报告，就是关于"旋转宇宙"的论文。

后来，他的兴趣转向哲学。他认为，健全的哲学思想对科学研究的成功有很密切的关系。他说，数学及元数学的（特别是关于超穷推理的）客观主义观点，对于他的逻辑研究是最根本的。1959年起，他开始阅读德国哲学家胡塞尔的哲学著作，并一直保持着强烈的兴趣。他认为有些哲学家，特别是柏拉图和笛卡尔，在他们一生中具有一种与日常生活的世界观完全不同的直观的世界观，也许胡塞尔也曾达到过这种境界。

晚年，哥德尔间或对数理逻辑作些工作。美国符号逻辑协会正在组织力量搜集整理他的著作，准备出版他的全集。他已经出版的逻辑方面的论著，不过二十余篇，大都很简短，不过它们在历史上的

作用是十分巨大的。

1978年1月14日下午，他在普林斯顿医院的椅子上坐着候诊时去世，享年72岁。

4-2 1930年数理逻辑的状况

1930年前，整个数学界是非常乐观的。希尔伯特的思想占统治地位。数学是建立在集合论和数理逻辑两块基石之上。康托尔的朴素集合论已被公理集合论所代替，从而消除了悖论。选择公理是一个很好的工具，数学中许多部门都要用到它。连续统假设仍然是悬案，不过希尔伯特多次觉得自己已接近解决这个难题。看来前景是乐观的。大部分数学可以建立在谓词演算的基础上，而一阶谓词演算的公理系统是无矛盾的，尽管其完全性仍有待证明。

整个数学的基本理论是自然数的算术和实数理论。它们都已经公理化。这些公理系统应该是无矛盾的，完全的，如果它们能够得证，并且集合论公理系统也能得到同样的结果，那么整个数学就比较牢靠了。

为了不使一小撮直觉主义者指手划脚、评头品

足，希尔伯特提出他的计划：把理论系统形式化，然后通过有限多步证明它们没有矛盾。他信心十足，在1930年9月东普鲁士哥尼斯堡的科学会会议上，他批判了不可知论。

1928年希尔伯特提出四个问题：

1. 分析的无矛盾性。1924年阿克曼和1927年冯·诺意曼的工作使希尔伯特相信只要一些纯算术的初等引理即可证明。

1930年夏天，哥德尔开始研究这个问题，他不理解希尔伯特为什么要直接证明分析的无矛盾性。哥德尔认为应该把困难分解：用有限主义的算术证明算术的无矛盾性，再用算术的无矛盾性证明分析的无矛盾性。哥德尔由此出发去证明算术的无矛盾性而得出不完全性定理。

2. 更高级数学的无矛盾性。特别是选择公理的无矛盾性。这个问题后来被哥德尔在1938年以相对的方式解决。

3. 算术及分析形式系统的完全性。这个问题在1930年秋天哥尼斯堡的会议上，哥德尔已经提出了一个否定的解决。这个问题的否定成为数理逻辑发展的转折点。

4. 一阶谓词逻辑的完全性。这个问题已被哥

德尔在1930年完全解决。

这样一来，哥德尔的工作把希尔伯特的方向扭转，使数理逻辑走上全新的道路。

4-3 1930年哥德尔的两项主要贡献

1. 完全性定理：哥德尔的学位论文《逻辑函数演算的公理的完全性》解决了一阶谓词演算的完全性问题。罗素与怀德海建立了逻辑演算的公理系统及推演规则之后，数学家最关心的事就是公理系统的无矛盾性及完全性（也许还包括不那么重要的独立性）。所谓完全性就是，每一个真的逻辑数学命题都可以由这个公理系统导出，也就是可证明。命题演算的完全性已由美国数学家波斯特在1921年给出证明。而一阶谓词演算的完全性一直到1929年才由哥德尔给出证明。但是，哥德尔认为，斯柯仑在1922年的文章中已隐含证明了“或者A是可证的，或者┐A是可满足的”，但是他没有陈述这个结果，可能是他本人并没有意识到这一点。

2. 哥德尔的不完全性定理：这是数理逻辑最重大的成就之一，是数理逻辑发展的一个里程碑和

转折点。哥德尔在研究过程中直接考虑悖论及解决悖论的方法，从而把第三次数学危机引导至另外一个方向上。

哥德尔证明不完全性定理是从考虑数学分析的协调性问题开始的。1930年秋在哥尼斯堡会议上他宣布了第一不完全性定理：一个包括初等数论的形式系统，如果是协调的，那就是不完全的。不久之后他又宣布：如果初等算术系统是协调的，则协调性在算术系统内不可证明。

哥德尔的证明使用了“算术化”的方法。哥德尔说：“一个系统的公式………从外观上看是原始符号的有穷序列………不难严格地陈述，哪些原始符号的序列是合适公式，哪些不是。类似地，从形式观点看来，证明也只不过是（具有某种确定性质的）一串公式的有穷序列”。因此，研究一个形式系统实际上就是研究可数个对象的集合。我们给每个对象配上一个数，这种把每一个对象配上一个数的方法称为“哥德尔配数法”。哥德尔通过这些数反过来看原来形式系统的性质。

哥德尔研究了46种函数和谓词。他描述一类所谓“递归的”数论函数（以自然数为变元，取值也是自然数）即后来的原始递归函数。他定义原始递

归谓词P（x_1，……，x_n）为对应 ϕ（x_1，……，x_n）＝0的谓词，其中 ϕ（x_1，……，x_n）是原始递归函数。

哥德尔证明他的前45个函数和谓词都是原始递归的。但第46个谓词为“x是一个可证公式的哥德尔数”。在对哥德尔配数的系统中，可以得到一个公式，它相当于：我是不可证的。所以这个句子是不可证的且是真的。所以系统中存在真语句而又不可证，也就是系统不完全。

哥德尔的论文在1931年发表之后，立即引起逻辑学家的莫大兴趣。它开始虽然使人们感到惊异不解，不久即得到广泛承认，并且产生巨大的影响：

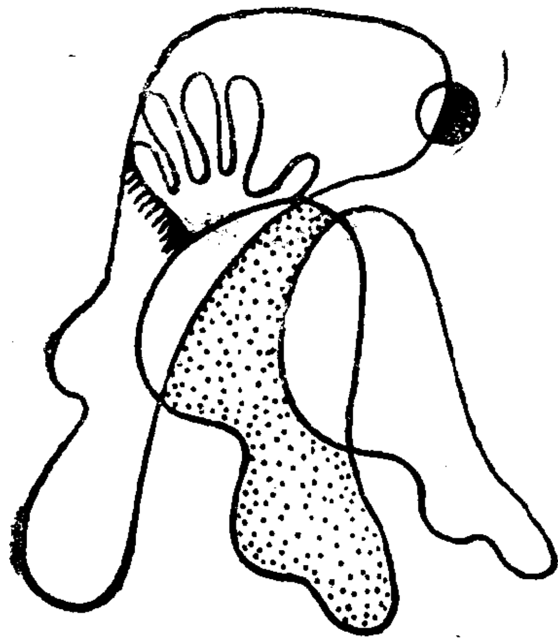
①哥德尔的证明对希尔伯特原来的计划是一个巨大的打击。因此，把整个数学形式化的打算是注定要失败的。因而逻辑主义和形式主义的原则是不能贯彻到底的。

②“希尔伯特计划”中证明论的有限主义观点必须修正，从而使证明论的要求稍稍放宽。1936年甘岑在容许超穷归纳的条件下证明了算术的无矛盾性。而倡导有限构造主义的直觉主义也不能解决问题。

③哥德尔的工具递归函数促进了递归函数论的

系统研究，同时推动不可判定问题的研究，开始出现递归论的新分支。

哥德尔不完全定理的证明结束了关于数学基础的争论不休的时期。数学基础的危机不那么突出表现出来。数理逻辑形成了一个带有强技巧性的独立学科，而绝大部分数学家仍然把自己的研究建立在朴素集合论或ZF公理集合论的基础上。尽管集合论中存在矛盾，但这些矛盾大部分均可回避。研究这些矛盾，特别是集合论的矛盾变成数理逻辑学家的事业。另外一方面，直觉主义和构造主义数学虽然也有发展，但终究是一小部分，半个世纪以来，在数学中始终不占统治地位。因为矛盾也好，危机也好，根源在于无穷，但是数学中毕竟少不了无穷，归根结蒂，数学终究是研究无穷的科学。



5. 数理逻辑的大发展

1930年以后，数学逻辑开始成为一个专门学科，得到了蓬勃发展。哥德尔的两个定理证明之后，希尔伯特的有限主义纲领行不通，证明论出现新的情况，主要有两方面：通过放宽有限主义的限制来证明算术无矛盾性以及把证明形式化、标准化。这些主要在三十年代完成。同时哥德尔引进递归函数，发展成递归论的新分支，开始研究判定问题。而哥德尔本人转向公理集合论的研究，从此出现公理集合论的黄金时代。五十年代模型论应运而生，它与数学有着密切联系，并逐步产生积极的作用。

5-1 证　明　论

证明论又称元数学，它研究数学的最基本活动——证明的合理性问题。研究这类数学基础的问题，原来一直是哲学家的事，后来才成为数学家的事。这个转变发生在1893年弗雷格发表《算术基础规则》之时，后来希尔伯特和他的许多合作者使这种思想发展成一门学科——元数学。

问题是用数学方法来研究整个数学理论。要使数学理论成为一个合适的研究对象，就必须使之形式化。自从希尔伯特和阿克曼所著《理论逻辑纲要》第一版在1928年出版以来，在实践中用得最多的是具有等式的一阶谓词演算（以及高阶谓词演算）。许多理论可以用一阶理论来表述，它比较简单方便，具有多种形式：

1. 希尔伯特的公理化系统。
2. 自然演绎系统。
3. 式列演算。
4. 语义表。

从基础的观点来看，有两个理论最为重要，因

而研究也最多。这两个理论就是形式化的皮亚诺算术理论与形式化的集合论。因为大多数现代数学理论都可以在这两个理论范围内发展，所以这两个理论的合理性如果得到证实，也就是向数学的可靠性迈进了一大步。“希尔伯特计划”无非就是要找到一个有限的证明步骤来证明算术的无矛盾性。

这里“有限”的意义是由法国年轻数学家厄布朗明确提出，他认为下列条件必须满足：

1. 必须只讨论确定的有限数目的对象及函数；

2. 这些对象及函数要能确定它们的真值产生协调一致的计算结果；

3. 一个对象如不指出如何构造它就不能肯定其存在；

4. 必须永远不考虑一个无穷集体中所有对象的集合；

5. 一个定理对于一组对象都成立的意思是，对于每个特殊的对象，可以重复所讲的普遍论证，而这普遍论证只能看成是结果特殊论证的原型。

数学理论的无矛盾性，有了这种有限的、可构造性的论证之后，任何人都可以放心了。

希尔伯特计划提出后，几组数学家分别为实现

它而努力：一组是希尔伯特及贝耐斯，以及阿克曼关于把数学理论形式化的研究，一组是冯·诺意曼关于算术无矛盾性的初步研究及哥德尔的不完全性定理以及甘岑的最后解决。还有一组是厄布朗及甘岑关于证明的标准形式等的研究。

厄布朗是法国天才的青年数学家。1931年8月在登阿尔卑斯山时遇难，年仅23岁。他对代数数论尤其是数理逻辑进行过重要的研究工作。1929年他在博士论文《证明论研究》中提出他的基本定理。从某种意义上来讲，这个定理是想把谓词演算归结为命题演算。由于前一理论是不可判定的，而后一理论是可判定的，因此这种归结不可能是完全的。

厄布朗把每个谓词演算的公式F对应于命题公式的无穷序列Hn（F），其中Hn（F）具有析取形式：$A_1 \vee \cdots\cdots \vee A_n$。这些公式称为厄布朗析取式。Hn是可以能行地定义的。也就是可以通过固定算法从F及n得出。厄布朗基本定理是说：F在谓词演算中可证当且仅当存在一个n，使得Hn是命题演算中的一个定理。

但是，由于厄布朗局限于希尔伯特有限主义立场，他应用的证明方法比较绕弯子。而且在1963年发现，他的证明中有漏洞。他的错误很快就得到了

弥补。

厄布朗定理可以使我们在证明中摆脱 三 段 论法。他的许多结果，后来也为甘岑独立地得出。

甘岑的自然演绎系统是把数学中的证明加以形式化的结果。他由此得出所谓"主定理"，即任何纯粹逻辑的证明，都可以表示成为某种正规形式，虽然正规形式不一定是唯一的。为了证明这个主定理，他引进所谓式列（Sequenz）演算：

所谓式列是二个有限多个公式组A_1，A_2，…，A_m 与B_1，B_2，…，B_n中间用→而得到的A_1，A_2，…，$A_m \to B_1$，B_2，…，B_n。利用式列，可以把一阶谓词演算非常漂亮地加以形式化，形成 推 论图。推论图有两类，一类是关于结构的推论图，一类是关于逻辑符号的推论图。例如前者有增（Verdünnung），减（Zusammenziehung），换（Vertauschung），断（Schnitt）。其中

增：$\dfrac{\Gamma \to \Theta}{D, \Gamma \to \Theta}$ $\dfrac{\Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, D}$

减，换不具体写出了。最主要是断

断：$\dfrac{\Gamma \to \Theta D \quad D, \Delta \to \Lambda}{\Gamma, \Delta \to \Theta, \Lambda}$

由这两个例子可以看出， 横线上的式列可看 成 前提，横线下的式列可看成推论，证明就是经过增、

减、换、断等四种方式以及关于逻辑符号析取（$\vee$）、合取（$\wedge$）、全称量词（$\forall$），存在量词（$\exists$）和否定的引进和消除共十种形式来完成的。任何证明都可以形式地写成一层一层的推论图所构成的证明图。证明图最上方是理论的公式如$D\to D$形的式列（称为始式列），而最终证明的结论就是最下方的终式列。由这个证明图，我们可以知道终式列最终得到证明。

在普通的数学证明中，最常用的是三段论法，即如果 $A\Rightarrow B$，且若 A成立，则 B成立。其实这就是甘岑推论图中的“断”。但是甘岑的主定理就是从任何证明图中可以消除掉所有的“断”。也就是，如果在一个证明中用到三段论法，那么定理表明，它也可以化成为不用三段论法的证明，也得到同样的结论。这个定理乍一看来似乎不可理解，其实正如甘岑所说，一个证明图中有三段论法实际上是“绕了弯子”，而不用三段论法是走直路。这种没有三段论法的证明图称为“正规形式”。利用这个主定理很容易得出许多重要结果，其中之一就是极为简单地证明“一阶谓词演算是无矛盾的。”而且能够推出许多无矛盾性的结果。后来还可以用来证明哥德尔的完全性及不完全性定理，当然，最重

要的事还是要证明算术的无矛盾性。

希尔伯特引进证明论的目标是证明整个数学的无矛盾性，其中最重要的是集合论的无矛盾性（至少ZF系统无矛盾），数学分析的无矛盾性，最基本的当然是算术的无矛盾性。哥德尔的不完全性定理说明，用有限的办法这个目标是达不到的。

由于哥德尔不完全定理的冲击，希尔伯特计划需要修改。

有限主义行不通就要用非有限的超穷步骤。1935年，甘岑用超穷归纳法证明自然数算术形式系统的无矛盾性。其后几年，他和其他人又给出了其他的证明。

这种放宽了的希尔伯特计划在第二次世界大战之后发展成为证明论的分支。这些证明也推广到分支类型论及其他理论。

甘岑在第二次大战行将结束时去世，他的结果代表当时证明论的最高成就，希尔伯特和贝纳斯的《数学基础》第二卷中总结了他的工作。但是证明论远远未能完成它的最初目标。战后随着模型论和递归论乃至六十年代以来公理集合论的发展，证明论一直进展不大。

五十年代中，日本数学家竹内外史（1926—）

等人开始对于实数理论（或数学分析）的无矛盾性进行探索。因为实数一开始就同有理数的无穷集合有关，描述它的语言用一阶谓词演算就不够了，所以第一步就要先把甘岑的工作推广到高阶谓词演算中去。

1967年，日本年轻数学家高桥元男用非构造的方法证明，单纯类型论中也可以消去三段论法。由此可以推出数学分析子系统的无矛盾性。但是，由于证明不是构造的，数学分析的无矛盾性至今仍然有待解决。

厄布朗及甘岑的结果，虽然不可能完成希尔伯特计划的最初目标，但是由于其有限性、可构造性的特点，现在已广泛地应用于机械化证明，成为这门学科的理论基础。

证明论的方法对于数理逻辑本身有很大的推动，特别是得出新的不可判定命题。最近，英国年轻数学家巴黎斯（J.Paris.）等人有了一项惊人的发现。他们发现了一个在皮亚诺算术中既不能证明也不能否证的纯粹组合问题。这不仅给哥德尔不完全性定理一个具体的实例，而且使人怀疑要解决许多至今尚未解决的数论难题，可能是白费力气。这无疑开辟了证明论一个完全新的方向。

5-2 递归论

递归论讨论的是从形式上刻划一个运算或一个进程的能行性这种直观的观念，也就是从原则上讲，它们能机械地进行而产生一个确定的结果。

能行的（effectif）这个概念含有可具体实现的、有效的、有实效的等等意思。法国数学家保莱尔首先在1898年他的函数论教科书中引进了这个词。他把数学的对象局限于能行的对象，这种主张实际上就是“法国经验主义”。因为函数论主要讨论集合、函数、积分等等。从这种观点产生出描述集合论，拜尔函数等概念。

递归论中所讨论的函数是比较简单的。它讨论有效可计算的函数，也就是递归函数。递归函数在历史上曾从不同角度提出来，后来证明它们都是等价的。

1931年秋天，丘奇在普林斯顿开了一门逻辑课。克林和罗塞尔当时作为学生记了笔记。丘奇在讲课中引进他的系统，并且在其中定义自然数。这就很自然引起一个问题，在丘奇系统中如何发展一

个自然数理论。于是克林开始进行研究，结果克林和丘奇得到一类可计算的函数，他们称之为λ可定义函数。

1934年春天，哥德尔在普林斯顿做了一系列讲演（克林和罗塞尔记了笔记）。在讲演中，哥德尔引进了另外一套可以精确定义的可计算函数类，他称为一般递归函数。据他讲，他是受了厄布朗的启发得到的。

这时自然出现了一个问题。一般递归函数类是否包括所有能行可计算的函数，它是否与克林与丘奇研究的λ可定义函数类重合。

1934年春末，丘奇和哥德尔讨论一般递归函数问题。结果丘奇明确提出他的“论点”，所有直觉上可看成能行可计算函数都是λ可定义函数，于是丘奇花了好几个月反复思考。当时克林表示怀疑，他认为这论点不太可能是对的，他想如果从λ可定义函数类用对角化方法可以得出另外一个能行可计算函数，那么它就不是λ可定义的。但他又想到这事行不通。不久之后，丘奇和克林在1936年分别发表论文，证明λ可定义函数类正好就是一般递归函数类。有了这个有力的证据，丘奇于是公开发表他的“论点”。

也是在1936年，英国年轻数学家图林发表了另外一篇重要文章，这标志着所谓图林机的产生。在这篇文章中，图林也定义了一类可计算函数，也就是用图林机可以计算的函数。同时，他也提出他的一个论点："能行可计算的函数"与"用图林机可计算的函数"是一回事。1937年图林证明了用图林机可计算的函数类与可定义函数类是一致的。当然，也就和一般递归函数类相重合。这样一来，丘奇的论点与图林的论点就是一回事。当时许多人对于丘奇的论点表示怀疑，由于图林的思想表述得如此清楚，从而消除了许多人的疑虑。哥德尔就是其中一位。从这时起大家对于丘奇—图林论点一般都抱支持的态度。

与图林同时，美国数学家波斯特也发表了一篇文章，类似于图林的可计算函数，他的文章过于简短，一直到1943年波斯特才发表了第四个表述。结果证明他的与别人的也都一样。

递归的概念并不难理解。它就是由前面的结果可以递推得到后面的结果。我们考虑自然数集合N到自然数集合N的函数，那么递归函数f（n）可以定义为：

$$\begin{cases} f(0)=a \\ f(n')=b(n, f(n)) \end{cases}$$

其中$b(x, y)$是固定的二元函数，a是固定的数；n'表示n的后继，对自然数来讲，就是$n+1$。这样知道$f(0)$，可得$f(1)$，知道$f(1)$可得$f(2)$，依此类推$f(0)$，$f(1)$，$f(2)$，…都可以一步一步具体算出来。经过类似的代换及递归的函数称为原始递归函数。

哥德尔等人引进的实际上是一般递归函数。一般递归函数都可以由原始递归函数算出来。它的定义是：

$\varphi(n_1, \cdots\cdots, nr) = \mu y\,[\tau(n_1, \cdots\cdots nr, y) = 0]$）其中$\tau(n_1, \cdots\cdots, nr, m)$都是原始递归函数，$\mu$表示极小算子。对每组$n_1$，…，$nr$，$\tau(n_1\cdots\cdots, nr, y) = 0$有解$y$，$\mu y$表示取解中最小解。

通过递归函数可以定义递归论中两个重要概念。

一个正整数集合称为递归可枚举的，如果存在一个递归函数$f(x)$，它只有一个正整数变元，取值也是一个正整数值，使$f(1)$，$f(2)$，$f(3)$，…构成这个给定的集合，例如：

(a) 1^2, 2^2, 3^2, …

(b) 1, 2, 2^{1+2}, $2^{1+2+2^{1+2}}$, …

都是递归可枚举集合。显然(a)可以用x^2这个递归函数来枚举的，(b)要复杂一些。

另一个复杂一些的概念称为递归集合S，它的定义是存在一种能行的办法来判断任何正整数n是否属于S。

正整数集合是递归的当且仅当它与它在N中的补集都是递归可枚举的。任何无穷递归可枚举集都包含一个无穷递归集。但是，存在正整数的递归可枚举集而不是递归集。

于是波斯特提出问题：是否存在两个递归可枚举但是非递归的集合，使得第一个集合相对于第二个是递归的，但第二个相对于第一个却不是递归的。一直到十二年后的1956年，苏联人穆其尼克(A.A.Мучник1934—)及美国人弗里德伯格(Richard Frielberg，1935—)才独立地肯定地解决了这个问题。

苏联数学家马尔科夫在1947年发表《算法论》，首先明确提出算法的概念。但是它同以前定义的递归函数及可计算函数的计算过程都是等价的。这几个定义表面上很不相同，并有着十分不同的逻辑出

发点，却全都证明是等价的。这件事看来决非巧合。它表明，所有这些定义都是同一个概念，而且这个概念是自然的，基本的、有用的。这就是“算法”概念的精确的数学定义。大家都接受了这个定义之后，判定问题从我们平时直观的概念也上升为精确的数学概念，判定问题也成为一门数理逻辑的重要分支了。从这时起，判定问题有突飞猛进的发展。

判定问题有了精确的数学表述之后，立即在数学基础乃至整个数学中产生了巨大的影响。因为这时一些不可判定命题的出现，标志着在数学历史上人们第一次认识到，有一些问题不可能找到算法解。在过去，人们一直模模糊糊地觉得，任何一个精确表述的数学问题，总可以通过有限步骤来判定它是对还是错，是有解还是没有解。找到不可判定问题再一次说明用有限过程对付无穷的局限性，它从另外一个角度反映了数学的内在固有矛盾。

怎样得到这些结果的呢？丘奇的论点发表之后，不难看出存在不可计算的函数，也就是非一般递归的函数。因为所有可能不同的算法共有可数无穷多（粗浅来讲，算法都是用有限多个字来描述的），可是所有数论函数的集合却是不可数的。

不过，头一个明显的不可判定的结果是1936年丘奇得到的。他首先得到与λ可定义性有关的不可判定结果。然后，他把这个结果应用到形式系统的判定问题上，特别他证明，形式化的一阶数论N是不可判定的。也是在1936年，丘奇证明纯粹的谓词演算也是不可判定的。

当时大家的反应是：这种不完全性的范围到底有多广？

甚至于象丘奇这样的数学家，也想找到一条出路能避开哥德尔的结果。比如说，可以采用同哥德尔所用的系统完全不同的其他的特殊系统。

一旦算法的精确定义和丘奇论点出现之后，大家就认识到躲不过哥德尔不完全性定理的影响，可计算性和不完全性这两个概念是紧密联系在一起的。

实际上克林在1936年证明了（作为丘奇论点的应用）甚至在能够能行地认出公理和证明的形式系统中，哥德尔的定理仍然成立。消去量词方法对许多理论行不通。

一般的判定问题是试图找出一个能行的步骤，通过这个步骤可以决定什么东西具有某种指定的元数学特征。

在纯粹逻辑演算的元理论中，有最明显的一类判定问题：对于给定的演算和给定类的公式，求出一个步骤，能够在有限多步内判定这类的任何特殊公式是否可以形式地推导出来。有些情形，问题已经得到肯定的解决，在另外一些情形，答案是否定的，可以证明不存在这样一个步骤。这种否定的证明，特别对于数学理论，很大程度上依赖于递归论。

最早明确提出的数学判定问题是希尔伯特第十问题。他在1900年国际数学家大会上提出了著名的二十三个问题，其中第十个问题是：给定一个有任意多未知数的、系数为有理整数的丢番图方程，设计一个步骤，通过它可以经有限步运算判定该方程是否有有理整数解。这个到1970年才被否定解决的问题不仅解决了一个重大问题，而且解决问题过程中所得到的工具和结果对数理逻辑和数学发展有着极大影响，比如表示素数的多项式。尤其与整个数理逻辑有关的是得出了一个更确切的哥德尔不完全性定理。

哥德尔不完全性定理，设A是一个公理系统，其语言由数学符号0，（表示后继），+，·，<组成，且满足

（1）A是协调的

（2）A是递归可枚举的

（3）A充分强足以证明形如

$$\alpha+\beta=\gamma$$

$$\alpha\cdot\beta=\gamma$$

$$\alpha<\beta$$

的任何真命题，其中α，β，γ取自0，$0'$，$0''$，……

则我们能造出一个对应于A的丢番图方程F（x_1……，xr_2）=0，使得F=0没有自然数解。但是我们从A不能推导出

$$\neg(\exists x_1\cdots\cdots xr)[F(x_1,\ \cdots\cdots xr)=0]$$

这正好说明，如果A的公理是数论中的真命题，那么A是不完全的。

现在我们来看希尔伯特第十问题，为了清楚起见，我们考虑多项式方程，看看一般的多项式丢番图方程的次数和未定元的数目是否可以降低。

1938年斯科兰姆证明，任何丢番图方程的次数可约化成次数≤4的方程。

1974年马蒂亚谢维奇（МаТИЯСеВИЧ）和罗滨逊（J·Robinson，1919—）证明未定元的数目可约化成≤〔3。

对于齐次方程，阿德勒（Adler）在1971年证

明，任何齐次方程可以能行地约化为二次齐次方程组，从而等价于一个四次齐次方程。

对于一次方程早就有具体方法解丢番图方程了。对于任意多未定元的二次方程，1972年西格尔也找到一个算法。四次方程不能判定，三次方程尚不知道。

解决丢番图方程解是否存在的判定问题的方法是引进丢番图集。我们把丢番图方程的变元分成两组$\{a_1, \cdots, a_m\}$和$\{u_1, \cdots, u_n\}$，为了简单起见，可取$m=1$，我们称一个自然数集合S是丢番图集合，如果存在丢番图方程$P(a, u_1, \cdots, u_n)=0$，使得$a\in S$当且仅当$P(a, u_1, \cdots, u_m)=0$有一组解。每个丢番图集合是递归可枚举集。1970年，苏联大学生马蒂亚谢维奇证明了每个递归可枚举集也是丢番图集合。这样一来，由于存在不可判定的递归可枚举集，所以存在一些特殊的丢番图方程P，使得对任何a关于P是否有解的判定问题不可解。当然对一般丢番图方程的判定问题就更不可解了。

另一个判定问题是半群和群论中字的问题，半群问题是挪威数学家图埃(A·Thue，1863—1922)在1907年首先提出来的。问题是对于一个半群，如果

给定它的有限多生成元和有限多关系，那么能否找到一个方法来判定任何一个特殊的字是否等于单位元素。1947年波斯特否定地解决了这个问题。群论中字的问题更为重要。它是在1911年由德恩（M·Dehn 1878—1952）首先研究的，一直到1955年才由苏联数学家诺维科夫（П·С·Новиков 1901—1976）否定解决。这些结果给数学家指引了新的方向：不要妄图去解决一大类问题。不过对于更窄的一类的对象比如一类特殊的群，群的字的问题是可解的。

5-3 模 型 论

模型论是数理逻辑的一个分支，讨论形式语言与其解释或者模型之间的关系。如语言是一阶谓词逻辑，则这种模型论就称为“古典模型论”。最简单的模型是数学中的一些结构，例如，5阶循环群，有理数域，以及所有按照包含关系所形成的偏序结构由整数构成的集合等等。在数学里我们直接研究这类模型，而不管形式语言。这个理论可以说是泛代数（当然也包含通常代数中的群论、环论、域论

等等）。它们研究同态、同构，子结构、直积等等。可是关于这些模型的性质，都要表示成为语言。反过来，一个语句可以真也可以假，看你是说哪一个模型。比如“群中任何两元素的乘法满足交换律”这个语句，对于5阶循环群这个结构来讲是真的，对于正二十面体群这个结构来讲就是假的。使语句φ为真的结构A也就是给语句一个具体表现或者具体解释，因此我们就把A称为φ的模型，用记号 A⊨φ 表示。同样，我们也可以说一组语句（称为理论）Σ的模型。

这样看，模型论和代数学是有区别的，有人把模型论看成是逻辑加上泛代数，这也是十分形象的。模型论一定要明显地涉及语句，并且以语句为出发点，这是它同一般代数学有区别的地方。另外模型论的语言是形式语言，它与模型的关系是语法和语义的关系。对于形式语言，我们只是按照一定的规则（文法规则）去造出一些语句，至于这些语句含义如何，是真是假，就不是语法所能管得了的。语法只考虑形式的结构，比如构成语句的符号是哪些，符号之间的关系如何（谁在谁的前面而不能在后面）等等，而语义则提供解释或者意义，只有意义才能确认语句的真假（除了重言式或恒真语

句或同语反复之外）。因此可以说，模型论是研究形式语言的语法和语义之间关系的学科。

在数学中，我们对模型还不是很陌生，在非欧几何中就是靠引进模型才论证了非欧几何公理系统是不矛盾的。

但一直到1950年左右，模型论才正式成为一门新学科。主要标志是1949年亨肯（L•Henkin，1921—）发表的完全性定理的新证明，1950年国际数学家大会上塔尔斯基与罗滨逊(A • Robinson 1918—1974)的报告以及1951年罗滨逊《代数的元数学》的发表。

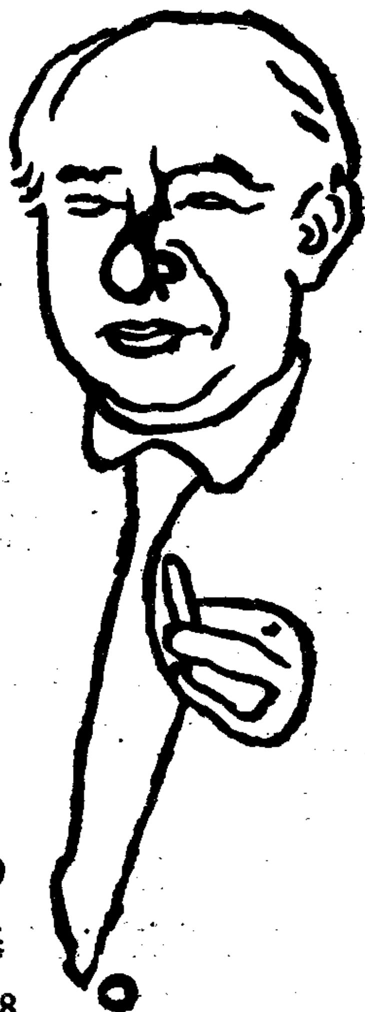


图10A·塔尔斯基（1902—1983）

自此之后，模型论大致可分为两条路线，一条是美国西海岸的斯科兰姆—塔尔斯基路线，他们从四十年代起就由数论、分析、集合论的问题所推动，强调研究一阶逻辑所有公式的集合模型。另一

条是美国东海岸的罗滨逊路线，他们的问题由抽象代表的问题所推动，它强调无量词公式集与存在公式集。关于两块量词的理论很多（即一块∀一块∃）。它们有许多应用。罗滨逊主要用于域论。苏联马力茨夫（А・И・Мальцев，1909—1967）等人主要用于群论。

属于纯粹模型论主题的最早的定理有两个，一个是罗文汉姆的定理。他在1915年证明每一组有限多公理如果有模型的话，则它也有一个可数模型。1920年斯科兰姆把这个定理推广到有可数个公理的情形。另一个定理是紧性定理：如一组语句T每个有限子集都有模型，则T也有一个模型。

三十年代哥德尔对可数语言证明紧性定理。1936年苏联马力茨夫推广到不可数语言。紧性定理在代数学方面有许多应用。

这两个定理都肯定某种模型的存在性，特别是罗文汉姆—斯科兰姆定理及紧性定理指出有想不到的特别大的模型存在。最明显的就是自然数集合N的皮亚诺公理（其中归纳公理加以改变）不仅有通常自然集N为其标准模型（即包括可数多个元素），还有包括不可数多个元素的模型，这就是所谓非标准算术模型。第一个非标准算术模型是由斯科兰姆

在1934年首先造出的。这两个定理的证明都依赖于造模型的方法。

模型论中常用的构造模型方法与工具有：

1、初等链方法

2、图式

3、紧性定理

4、下行罗文海姆—斯科兰姆定理

5、省略类型定理

6、力迫法

7、超积

8、齐性集合

这些方法都是相当专门的。

图式方法是亨金及罗滨逊首创的。它有许多用处，不仅能证明紧性定理、罗文汉姆—斯科兰姆定理、哥德尔完全性定理等等，而且得出许多新定理。

如克雷格（Craig）内插定理（1957）。令$\varphi \models \psi$表示φ的每个模型均为ψ的模型，则存在语句θ，便$\varphi \models \theta$，$\theta \models \psi$。

林登（R·Lyndon，1917—）同态定理（1959）。显然φ的模型的同构象也是φ的模型。那么同态象呢？林登定理说，φ保持同态象当且仅当存

在不含否定记号┐的“肯定”语句ψ，ψ与φ具有相同的模型。例如群论、环论、域论在同态象之下仍是群论、环论、域论，因为它们的公理都是不含┐的“肯定”语句。

另外一个有趣的定理是关于完全理论的。一个理论T称为完全的，如果存在有模型A，使在A中为真的所有语句的集合Th(A)正好等于T。那么完全理论有多少个不同的可数模型呢？有的完全理论只有一个可数模型（无原子的布尔代数），有的完全理论有可数无穷多个可数模型（代数封闭域），有的有不可数多个模型（实闭域），还有人证明对$n \geqslant 3$，都有正好n个可数模型。是否有正好两个可数模型的完全理论呢？沃特（R·L·Vaught，1926—）在1959年证明：没有！

初等链是塔尔斯基及沃特在1957年提出的。超积是最常用的构造模型的方法，超积和超幂的用处表现在同构定理上：两个模型A，B、初等等价当且仅当其超积同构。其一般情形是舍拉在1971年证明的。

超幂另一个很大的用处是构造非标准分析的模型。

对于数学理论最重要的事是公理化。在模型论

中，对于一类结构K，一组语句如果等价于Th(K)则是K的一组公理。公理数目可以有限多，称为有限可公理化的理论。这类理论有：群、交换群、环、整域、域、特征p的域（p固定）、有序域、全序集、格、布尔代数，贝纳斯—哥德尔集合论等等。许多重要理论是不能有限公理化的、其中一部分是递归可公理化的。如可分群、无挠群、特征0的域、代数封闭域、实封闭域、有限域、尤其重要的是皮亚诺算术和ZF集合论。而有限群论甚至连递归可公理化都不行。

一个理论是递归可公理化的充分必要条件是：它的所有推论集合是递归可枚举的。通常它不一定是递归的，如果是递归的，则称为可判定的。可以证明，每个完全的、递归可公理化理论是可判定的。因此利用模型论的有力工具可以得出判定理论的一些结果，如早在1948年塔尔斯基等人证明，实闭域理论（见78页）是完全的，因此是可判定的。

早在十九世纪，数学家利用造模型的方法来肯定非欧几何的真实性，他们造过许多模型，但这些模型本质上没有区别，也就是“同构”。在二十世纪初，数学家一般认为，一个理论的模型都是同构的，如自然数理论就是皮亚诺公理所刻划的一种。

但是这种想法很快就由于自然数非标准模型的存在而被打破。所以在模型论当中引进重要的概念——范畴性。一个理论或一组公式如果其所有模型均同构，它就称为范畴的。实际上，这对于形式系统（或公理系统）是仅次于协调性（无矛盾性）、完全性、独立性之后的第四个重要要求。但是，这个要求实在太强了。实际上，只要一个理论有一个无穷模型，那么它就不是范畴的。所以我们把范畴性的要求降低，降为K范畴性，也就是对于某一基数K，所有基数为K的模型都同构。满足这个条件的例子有不少，如特征为0的代数封闭域（如复数域）的公理系统是ω1范畴的，没有端点的稠密全序集（如0，1之间的有理数）的公理系统是ω范畴的。于是，沃斯猜想，如果对于某个基数K，K＞|L|（|L|为语言的基数），某理论厂是K范畴的，则对于所有的K＞|L|，该理论厂也是K范畴的。莫莱（M·Morley，1930—）对于最常用的|L|＝ω。情形证明了这个猜想，后来舍拉对于一般情形给出了证明。

对于不同构模型，在二十年代形成了“分类理论”的重要分支。其中首先研究如果一个理论不是K范畴的，那到底有多少种基数为K的模型。另外

对于K范畴的理论，基数为 $|L|$ 的模型数目有几种可能？这方面最基本的情形是：如果L为L的封闭公式集，$|L| = \omega_0$ 且Γ是 ω_1 范畴的，则所有基数为 ω_0 的模型或者都同构，或者具有 ω_0 个不同构的模型，也就是，不可能有有限多个不同构的模型。

模型论给数学带来许多新结果，我们大致可以分成三大部分：在代数方面的应用，主要是在群论和域论方面；在分析方面的应用，主要是非标准分析；在拓朴学、代数几何学方面的应用，主要是拓朴斯理论。

模型论在代数学中最早的应用是量词的消去，早在三十年代，由此得到了整数加法群的判定步骤；塔尔斯基得到实数的可定义集和实数域的判定步骤。

1965年以后，数理逻辑的发展逐步影响到数学本身而重新引起数学家的注意。特别是集合论与模型论的结果不断冲击数学本身。模型论在解决代数问题方面显示巨大威力，特别是艾柯斯（J. AX）及柯辰（kochen，1934——）解决了著名的阿廷（E. Artin，1898—1962）猜想。这个问题使代数学家为难了几十年。这个定理说：“在p-adic域上，对于所有整数d>o，存在素数的有限集合E(d)，使得

如果素数$P \notin E(d)$，则所有齐次多项式$f \in Q_p(x_1, \cdots, X_n)$，$n > d^2$，在$Q^n_p$中均有一个非平凡零点。阿廷原来猜想$E(d)$是空集。这个证明表明，"例外素数"（$E(d)$）是不可避免的。

非标准分析是罗滨逊在1960年创造的。他利用模型论的思想构造出实数集R的一个扩张*R，或者说一个非标准模型。R中有$Z\omega_0$那么多元素，但是其扩张*R包含的元素要多得多，有$2^{2\omega_0}$个元素。多出来的元素都是什么呢？一部分是无穷大，另一部分是无穷小量。这样一来，又恢复了原来不严密的莱布尼兹的无穷小分析。十九世纪柯西、威尔斯特拉斯使它们严密化，引进极限、连续、$\varepsilon-\delta$，成为今天的严密的微积分，也就是标准分析。现在罗滨逊又召回无穷小的亡灵，不过这回是建立在严密的逻辑基础上了。

1961年1月在美国数学会上，罗滨逊宣布他的非标准分析。其实这就是逻辑学家所谓的实数的非标准模型。在这篇报告中，他总结了新方法的所有重要方面，因此无可争辩地成为这个新领域的独一无二的创造者。他指出，实数系统是全序域，具有阿基米德性质，也就是任何一个正实数经过有限次自己加自己之后可以超过任何一个实数。但是非标

准实数一般并不满足这个条件，比如说一个无穷小量的一千倍，一万倍、一亿倍甚至更多，也大不过1去。这个性质称为非阿基米德性质。



图11A·罗滨逊（1918—1974）

实际上对任何数学结构A，我们都可以把它嵌入到一个扩张*A当中，*A中包含许多“理想”元素。（这就象把有理数扩张到实数，把任何变量空间加以完备化一样）。当然这个扩张也可以通过代数的方法得到，也就是模型论中的有力工具超幂，即取*A＝A^I/U，其中U是指标集I的子集上的超滤、超幂即笛卡尔积的商集。由于这个非标准的构造方法，可以说我们原则上可以消去非标准的方法而完全用标准的语言，只不过这样做太烦琐了。因此，非标准分析仍有其存在的价值。最近，非标准分析在分析、微分几何学、代数几何学、拓扑学有一系列的

应用，使数学家对非标准分析也不得不另眼相看了。特别是非标准拓扑和非标准测度论近来更是有重要的突破。

非标准测度论已经得出许多新的“标准”结果如关于测度的扩张、位势理论、布朗运动理论、随机微分方程、最优控制理论，甚至运用到数理经济学及高分子物理化学当中。其中关键来自1975年洛布（P.A.Loeb，1937——）的工作。他从非标准测度空间能造出丰富的标准测度空间，使得非标准分析真正能对标准数学作出自己的贡献。

拓扑斯是统一现代数学的最新基础，它反映了数理逻辑与范畴论的结合。范畴论大约在六十年代初由同调代数学脱胎而出，而同调代数则在四十年代末到六十年代初由代数拓扑学发展而来。代数拓扑学则是用群、环、域、模等代数结构来刻划几何图形的拓扑结构。同调代数学则用代数结构来刻划代数结构，比如说一组群与另一组的对应关系。把这个组发展到集合或其它任何结构，研究范畴与范畴之间的关系就是范畴论。

我们可以考虑集合的范畴和范畴的范畴。1963年出现了层的范畴，这就是拓扑斯。拓扑斯使范畴方法迅速推广到其他数学分支中去。1970年，劳威

尔（Lawvere）等人引进一种特殊的范畴——初等拓扑斯。几年之后，证明了一个重要结果，一个初等拓扑斯正好是高阶直觉主义集合论的模型。因此，初等拓扑斯就象集合一样成为数学的基础。而且更接近数学的内容。

5-4 公理集合论

1930年以后，迎来了公理集合论的黄金时代。对于数学家来说，策梅罗的公理系统ZF大致够用。他们仍不太关心集合论的细微末节，以及一层一层的无穷大，这些在他们的数学中难得碰到。不过除了九条可靠的ZF公理之外，他们也往往需要选择公理（AC）。有时也要考虑连续统假设(CH)。他们希望这两个公理是真的，这样似乎就可以天下太平了。谁知事情越来越麻烦，现在居然找出一大堆玄妙的公理和假设，它们能推出一些我们想要的结果来，同时又出现许多荒唐矛盾的现象。这些现象十分有趣，但是从外行看来实在乱七八糟。这里只是简单归纳介绍一下：

5.4.1 选择公理

选择公理是现代数学中最常用的假设，过去许多人曾不自觉地使用。对这个问题引起注意，是因为康托尔在1883年提出任意集合是否都可良序化的问题。希尔伯特也曾把这个问题引入其23问题头一问题的后半部分。1904年，策梅罗提出选择公理，并通过选择公理证明了良序定理。他提出的选择公理是说，对任何集合M，其每一个非空子集M′均可选出一个特别元素m′，m′∈M′。这个公理有极多的等价形式。其中有在代数中常用的造恩（M.Zorn，1908—）引理。这个应用极广、看来正确的选择公理，却可以证明出一些看来荒唐的结果。如1914年的豪斯道夫的分球面定理和1923年的巴拿赫一塔尔斯基悖论，一任意闭球体W可以分为两个不相交子集U和V之并，使W与U和V都能分别经过有限分割而重合。这引起大家对选择公理的疑虑。

可是选择公理的用途太大，不能忽视，许多学科的基本定理少不了它：

1. 泛函分析中的哈恩—巴拿赫定理（关于巴拿赫空间上的线性泛函的可扩张性）。

2. 拓扑学的吉洪诺夫（A.H.ТихоНоВ，1905—）定理（关于任意多紧空间的直积为紧。）

3. 布尔代数的斯通（A.H.Stone1903—）表示定理，每个布尔代数皆同构于集代数。

4. 自由群论的尼尔森（J. Nielson，1890—1959）定理，自由群的子群也是自由的。

其他还有许多定理，如果没有选择公理也不行。

5.4.2 连续统假设

连续统假设的历史最久，它可以说是随着集合论一起产生的。1883年康托尔就提出了这个假设，可数无穷集的基数的后面就是连续统的基数，即 $\omega = 2\omega_0 = C$。康托尔花了毕生精力去证明，但没有成功。希尔伯特把它列入自己著名的23个问题的头一个。希尔伯特本人也曾经用了许多精力证明它，并且在1925—1926年宣布过证明的大纲，但终究未能成功。这个问题终究悬而未决。

1930年哥德尔完成了他的两大贡献以后，曾说过，“现在该轮到集合论了”。他从1935年起就开始研究连续统假设及广义连续统假设（GCH）也即 $2\omega n = \omega n+1$。这一次他又出人意料地证明了ZF和GCH是协调一致的，不过当然要假设ZF本身也

是协调的，虽然这一点一直没有得到证明。

哥德尔应用可构造性公理证明ZFC和ZFC＋GCH的相对无矛盾性，他用可构造集的类L作为ZFC的模型。

1963年7月，美国年轻数学家科恩发明力迫法证明连续统假设的否定命题即¬CH也同ZF无矛盾，这样一来CH在ZF中既不能证明也不能否定。他得出结论ZF的公理系统还不够强，不够全，不足以证明或否定CH，甚至加上选择公理仍然不行。

力迫法是影响极为重大的方法，作法大致如下：

我们从满足ZFC公理的可数模型（M，∈）出发，缩减它使集合M成为传递的（即对任何x∈M，y∈x蕴函y∈M）。从M中选出一个偏序P。在集合的一般论域中，存在P的某些通用（generic）子集，适合某些特别的条件（即G关于M是可表示的或非奇异的子集）。结果可以证明，对于这些通用的集合G，存在ZFC公理的最小传递模型（N，∈），它满足N⊇M∪{G}（即G附加于M上）。

5.4.3 可构成性公理

哥德尔证明选择公理和连续统假设的协调性的

方法是定义一种类型的集合，叫做可构成集。一个集合称为可构成的，如果它属于和一切集合构成的全域具有同样大小的每一个ZFS模型。可构成集构成ZFS的一个模型，用符号L表示这个模型。假如把集合论中集合的概念完全用可构成集合的概念来理解，那么集合论中的一些概念就会有相应的改变。但是有一些概念不会改变，这种概念我们称为绝对的，特别是可构成性这个概念是绝对的。所以“一切集合是可构成的”。这称为可构成性公理。在模型L中是真的。可构成性的概念非常重要，表现在：

1。可构成性公理与ZF的其他公理是协调的。

2。可构成性公理蕴涵连续统假设和选择公理。

3。如果可测基数存在，则不可构成集合存在，这是斯科特（Dana Scott）1961年证明的。随后，罗巴通（Rowbottom）在他1964年的博士论文中证明可测基数的存在，蕴涵整数不可构成集合的存在性，后来他又证明可测基数的存在蕴涵只有可数无穷多个整数的可构成集合。

那么V＝L是否应该做为公理加进到集合论公理系统中去呢？一种意见是不应该，因为V＝L的局限性太严，我们尽可能多的使康托尔集合论都公

理化的目的就达不到。但是它的确有许多用处。1976年詹森（P.Jensen）利用V＝L解决描述集合论的五十年大问题苏斯林（M.Я.CycʌuH，1894—1919）问题。1974年舍拉又用V＝L解决群论中著名的怀特海（J.H.C.Whitehead 1904—1960）猜想。二十年代末期，美国逻辑学家西尔弗（Jack Silver）引进一种特殊的技术来推出V＝L的结果。他的方法是构造一种特殊的结构，现在通常称西尔弗机，由此可以推出许许多多新原理。

5.4.4 马丁公理（MA）

马丁公理是1970年由马丁（D.A.Martin）等人提出来的。它与ZFC的其他公理完全不同，不象一个“真”的公理，但是，由它可以推出数学上重要的结果。

马丁公理是连续统假设的推论，因此可以看成是弱连续统假设CH；它不象直接否定CH那样在ω_0与又ω之间存在任何基数λ，而只是说如果存在基数的话，这些基数的表现很象ω_0 比如说$2^\lambda = 2\omega_0$成立。

马丁公理同ZFC的公理是协调的，而且是独立的。并且如果ZFC是协调的，ZFC＋MA＋￢CH

也是协调的。

马丁公理在数学上有一系列的重要应用。特别重要的是，舍拉在1974年证明怀特海猜想在ZFC下是不可判定的。如果假定V＝L，则每个怀特海群是自由群；如果假定MA＋┐CH，则存在非自由的怀特海群。同样，许多拓扑学问题也有类似情况。只有加上MA＋┐CH才能得到正面或反面的结果。

5.4.5 大基数公理

连续统假设及广义连续统假设反映了最理想的大基数产生的方法，也就是一个接一个由幂集的基数产生出来。但是，这种理想的情况现在还无法证明，而与它不同或矛盾的情形也不可能得到否定。因此，这种种特殊大基数的存在性能得到更加特殊的结果，而且对数学本身产生了不可忽视的影响。

首先是不能由幂集生成的办法产生的基数。如果用λ表示任一无穷基数，λ^+表示紧接其后面的基数，假如存在某个$K>\omega_0$，使如$\lambda<K$，则$\lambda^+<k$，原称k为弱不可达基数，假如k使$\lambda<k$则$2^\lambda<k$，则称k为强不可达基数。在GCH之下，显然弱不可达等价于强不可达。由定义可以看出强不可达基数是

不可能通过幂集构造的方法得到的基数（除ω_0）。

进入不可达基数的领域，我们可以定义越来越大的基数。先碰到超不可达基数，然后是马洛(P. Mahto）基数，超马洛基数，再就是弱紧基数，无法表达的基数拉姆塞基数。最后我们还有更大的强紧基数与更一般的可测基数。它们中最小的分别一个比一个大，构成了一个等级森严的大基数王国。

虽然这些大基数极为玄乎，可是由它们可以推出许多重要的数学结果。因此我们不得不重视它们。

它们的存在性作为公理就是大基数公理。可以料到这些大基数公理同原来的一些公理是矛盾的。比如，可构造公理就蕴涵可测基数不存在。

大基数公理对数学问题的重要性可以由下面问题的解决看出：拓扑学中一个著名的几十年未解决的正规莫尔（R.L.Moore，1882—1974）空间猜想归结为可测基数的存在问题。象过去局限于ZFC系统的证明是没有希望的。

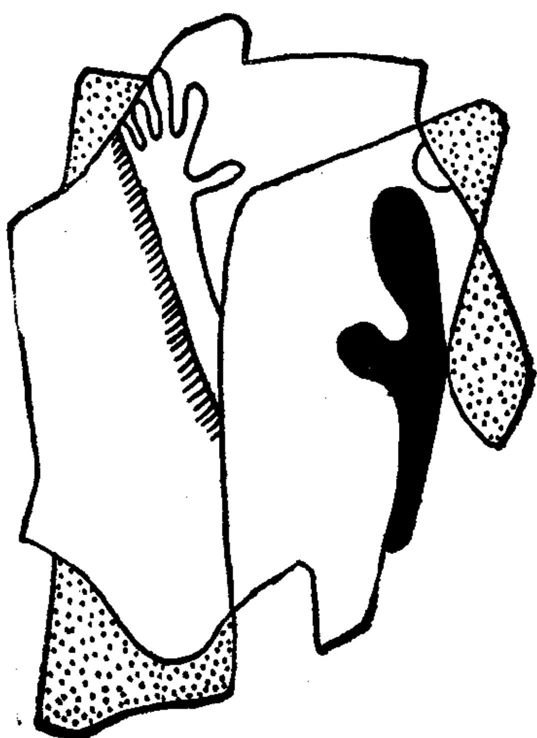
5.4.6 决定性公理

决定性公理是与描述集合论密切相关的公理。它涉及自然数列的集合是否能够通过某种方法决

定。

基本问题是：什么集合是可决定的？经过许多人的努力，马丁在1975年证明，数学中最常用的保莱尔集合是可决定的。下一个猜想是证明所有解析集合（即二维保莱尔集合的射影集合）是可决定的。但这个猜想与哥德尔的可构成性公理相矛盾。上面讲过，可构成性公理与ZFC是相容的，因此，这个猜想无法在集合论中证明。这样一来，它本身可以成为一个新公理。

比这个公理更激进的公理是：R的所有子集合都是决定的。这个公理太激烈了，以致很难为“真”，因为它首先同选择公理有矛盾。不过，由这个决定性公理却能推出一系列有趣的数学事实；其中最突出的是，由AD可推出所有实数集合都是勒贝格可测的。这样一来，许多数学成为没有意思的了。因此，数学家还是不太想要这个太强的公理。可是，它带来的一系列问题仍有待解决。



6. 数学与哲学

从1900年到1930年左右，数学的危机使许多数学家卷入一场大辩论当中。他们看到这次危机涉及数学的根本，必须对数学的哲学基础加以严密的考察。在这场大辩论中，原来的不明显的意见分歧扩展成为学派的争论，以罗素为代表的逻辑主义，以布劳威尔为代表的直觉主义，以希尔伯特为代表的形式主义三大学派应运而生。他们在争论过程中尽管言语尖刻，好象势不两立，其实他们各自的观点在争论过程中都吸收了对立面的看法而有很多变化。1930年哥德尔不完全性定理的证明暴露了各派的弱点，哲学的争论冷淡了下去。此后各派力量沿着自己的道路发展演化。尽管争论的问题远未解决，但大部分数学家并不太关心哲学问题。近年来数学哲学问题又激起人们的兴趣，因此，我们有必要了解

一下数学哲学的来龙去脉。

6-1 逻 辑 主 义

罗素在1903年出版的《数学的原理》,中对于数学的本性发表了自己的见解。他说：“纯粹数学是所有形如‘p蕴涵q’的所有命题类，其中p和q都包含数目相同的一个或多个变元的命题，且p和q除了逻辑常项之外，不包含任何常项。所谓逻辑常项是可由下面这些对象定义的概念：蕴涵，一个项与它所属类的关系，如此这般的概念，关系的概念，以及象涉及上述形式一般命题概念的其他概念。除此之外，数学使用一个不是它所考虑的命题组成部分的概念，即真假的概念。”

这种看法是罗素自己最早发表的关于逻辑主义的论点。这种看法，在以前也不同程度被戴德金、弗雷格、皮亚诺、怀特海等人表达过。

戴德金在1872年出版了《连续性及无理数》。在这篇文章中，他把有理数做为已知，进而分析连续性这个概念。为了要彻底解决这个问题，必须考虑有理数乃至自然数产生的问题。他认为应该建立

在逻辑基础上，但没有实行。

弗雷格在1884年《算术基础》中，认为每个数是一个独立的对象。他认为算术规则是分析判断，因此是先验的。根据这点，算术只是逻辑进一步发展的形式，每个算术定理是一个逻辑规律，但是是导出的规律。把算术应用到自然现象上的解释只是对所观察到的事实的逻辑加工，计算就是推理。数字规律无须实践检验即可应用于外在世界。而在外在世界、空间总体及其内容物，并没有概念，没有数，因此，数字规律实际上不能应用于外在世界，这些规律并不是自然规律。不过它们可以应用于对外在世界中的事物为真的判断上，这些判断即是自然规律。它们反映的不是自然现象之间的关系，而是关于自然现象的判断之间的关系。

早在罗素发现悖论之前，他在写作《数学的原理》时，就企图把数学还原为逻辑，由于发现悖论，这个计划遭到了困难。他发现消除悖论的方法之后，又开始具体实现他的计划。这就是他和怀特海合著的《数学原理》。

既然罗素、怀特海的《数学原理》原来的目的是企图把数学建立在逻辑的基础上，因此，书一开始就提出几个不加定义的概念和一些逻辑的公理，

由此推出逻辑规则以及数学定性。

不加定义的概念有基本命题、命题函数、断言、或、否（非）。这里讲的命题是指陈述一件事实或描述一种关系的一个语句，如“张三是人”，“苹果是红的”、命题函项含有一个变项，如“x是一个整数”，假如把x这个变项代入一个固定的值（比如2），就得到一个命题（“2是一个整数”）。断言是指肯定一个基本命题为真，一般记做r。“或”也称“析取”，用∨表示，“否”是命题的反面，罗素用～p表示p的否定（现在通用┐p）。

由这些概念可定义逻辑上最重要的概念“蕴涵”。

最基本的逻辑出现有六条如q⊃（p∨q），（p∨q）⊃（q∨p）等等。

要想由逻辑推出数学，第一步是推出“数”来。这件事皮亚诺及弗雷格都做了。罗素在消除悖论之后，成功地用“类”来定义1。这个过程极为繁琐、费力，一直到《数学原理》第一卷363页才推出“1”的定义。而第二卷费了很大力气证明n×m＝m×n。

在《数学的原理》及《数学原理》中，罗素的目标在于证明“数学和逻辑是全等的”这个逻辑主

义论题。它可以分析为三部分内容：

（1）每条数学真理都能够表示为完全用逻辑表达或表示的语言。简单来讲，即每条数学真理都能够表示为真正的逻辑命题。

（2）每一条真的逻辑命题如果是一条数学真理的翻译，则它就是逻辑真理。

（3）每条数学真理，一旦表示为一个逻辑命题，就可由少数逻辑公理及逻辑规则推导出来。

这三方面不完全一样，罗素只是分别在各处用一条或两条表示过逻辑主义。由于哥德尔的不完全定理，（3）是错的，但是还可以坚持（1）和（2）。

罗素认为逻辑主义的许多主要论点不是来自他本人。弗雷格曾明确地表示过一些逻辑主义观点。但是，逻辑主义观点尽管受到批判，罗素本人还一直坚持。在三十年代以后，还是有许多人发展逻辑主义。

逻辑主义从一开始就遭到批评，因为如果数学只是一套逻辑演绎系统，那么它怎么可能反映广泛的自然现象呢？它又怎样能够有创造力呢？它又怎样能够产生新观念呢？用维特根斯坦的话说，数学就是同语反复（重言式），给不出任何新知识。

罗素悖论的出现，这派遭到的攻击更大。彭加勒挖苦他们，逻辑主义的理论倒不是不毛之地，什么也不长，它滋长矛盾，这就更加让人受不了。

罗素—怀特海用了几年时间写出《数学原理》论证了自己的观点，仍不免遭到讥讽。彭加勒挖苦他们费很大力气去定义1，说“这是一个可钦可佩的定义，它献给那些从来不 知 道1的人。”别人也说这一套完全是中世纪的教条。

更有人指出这种方法的人为性、烦琐性，尤其是可化归公理，显然是硬加上的，没有任何自然之处。尽管如此，逻辑主义总算还能自圆其说。

对逻辑主义致命打击的是哥德尔的不完全性定理，证明了从逻辑并不能推出算术的正确性来。显然把数学全部化归为逻辑彻底失败了。但是，罗素等人的历史功绩是不可磨灭的。他们为数学奠定了逻辑基础。在一段时期内，《数学原理》是一部引导数学逻辑家的经典，至今它还有一定的意义。

逻辑主义也不是后继无人，英国的拉姆塞，美国的奎因（Quine，1908—　　）都对逻辑主义作了进一步的发展。

6-2 直觉主义

直觉主义有着长远的历史，它植根于数学的构造性当中。古代数学大多是算，只是在欧几里得几何学中逻辑才起一定作用。到了十七世纪解析几何和微积分发明之后，计算的倾向大大超过逻辑倾向，十七、十八世纪的创造，并不考虑逻辑的严格，而只是醉心于计算。十九世纪初，三个力量出现了，一个是解五次代数方程碰钉子，需要考虑存在性定理。一个是非欧几何不矛盾，是逻辑而不是直觉在起作用。一个是数学分析不严格，产生荒谬的结果。在新的矛盾面前出现一些非构造性结果，也考虑一些无穷的问题。这时追求严密与追求实用构造两种倾向都有增长，不过一般数学家维持着微妙的平衡。一直到十九世纪末，集合论的出现激起这两方面的尖锐斗争。于是出现极端的构造主义者，象克洛耐克否认无理数存在，否认连续函数，他认为任何东西都要有构造步骤或判断准则。但即使他本人的工作也不符合他自己的要求。

法国数学家彭加勒等人是半直觉主义者；有人

称为法国经验主义者。他们反对实无穷，反对实数集合，反对选择公理，主要因为他们认为根本不能进行无穷的构造。

现代直觉主义真正的奠基人是布劳威尔，他于1881年2月27日生于荷兰奥弗西。1897年进入阿姆斯特丹大学学习，一直到1904年，他很快掌握了当时的数学并且发表关于几何第一个结果。他多少受曼诺利（Mannoury）的影响，关心当时的基础问题，在1907年博士论文中阐述自己对数学基础问题的观点。他是从哲学得出自己观点的，基本的直觉是按照时间顺序出现的感觉，而这形成自然数的概念，这倒不是新鲜的。他认为数学思维是头脑中的自由构造，与经验世界无关，只受基本数学直觉为基础的限制，在这方面他是不同于法国经验主义者的。数学概念进入人脑是先于语言、逻辑和经验的，决定概念的正确性是直觉，而不是经验及逻辑。这些充分暴露了他唯心主义和神秘主义的思想倾向。

他认为数学直觉的世界和感觉的世界是互相对立的，日常语言属于感觉世界，不属于数学。数学独立于语言存在，而逻辑是从属于语言的，它不是揭露真理的工具，而是运用语言的手段。正因为如



此，数学中最主要的进展不是靠逻辑形式完美化而得到，而是靠基本理论本身的变革。他认为逻辑规律并不对数学有什么约束作用，数学是自由的，不一定遵守什么逻辑规律。他认为经典逻辑是从有限集合的数学抽象出来，没有理由运用到无穷集合。1908年他反对把排中律运用于无穷集合上。因为有穷集合可以逐个检查，而无穷集合则办不到，因此，存在不可断定真假的第三种情况，就是说，有既不可证明，又非得要证明的命题。

1908年到1913年他主要从事拓扑学的研究，他运用单形逼近的方法证明维数的拓扑不变性，这在数学上是个了不起的成就。这个方法是极重要的拓扑方法。他在李群、几何等方面也有出色的工作。不过很快他又转向基础研究。布劳威尔象康德和彭加勒一样，认为数学的定理是先验综合真理。在他1912年在阿姆斯特丹大学就职演说中，他承认，由于非欧几何的发展，康德的空间学说不可信，但他同弗雷格和罗素相反，仍然坚持康德的观点，算术是从对时间的直觉导出的。由于现代数学建立在算术基础上，所以整个数学也是如此。正是时间单位的序列产生序数的概念，而连续统〔0，1〕只是不可用新单位穷尽的居间性。他认为几何学也依赖于

这种直觉。他认为除了可数集合之外，没有其他集合，所以ω_0以上的超穷数都是胡说八道，象0与1之间所有实数的集合是毫无意义的。这点他在1908年罗马召开的国际数学家大会上讲过，数学无穷集合只有一个基数，即可数无穷。

在1909年他同希尔伯特通过信，指出形式主义和直觉主义的争论焦点。1912 年 说 到这个问题之后，他一直到1917年才又开始这方面的论战。

从这时起到二十年代末他发表一系列的文章，开始建立一个不依靠排中律的集合论，接着又建立构造的测度论及函数论，这是他从消极的否定转变为积极的构造。

同时他试图使数学家相信排中律导出矛盾。他运用了扇定理，这个定理及选择 序 列，散集（spreads）等是他的直觉主义数学的独创。

三十年代初期由于哥德尔的工作，许多数学家开始重视直觉主义。外尔早在1920年左右就表示效忠于直觉主义，从而激起希尔伯特的极大愤怒。他吸收了直觉主义一些思想，开始用有限主义方法来完成证明论方案，企图一劳永逸地解决基础问题，不料没能成功，于是还得求助于无穷。

直觉主义仍然进行他们的事业，特别是海丁建

立直觉逻辑系统，它包含古典逻辑系统。后来更有人建立直觉主义集合论及直觉主义分析。不过，仍然不能尽如人意。



图12. L.布劳威尔（1881—1966）

1967年，美国数学家毕肖普（E.Bishop，1928—1983）出版《构造性分析》，开始了构造主义的时期。他们不象以前直觉主义者那样偏激，而是积极采用构造的方法解决一个一个具体问题。不去单纯的否定或争论。毕肖普自信会取得大多数人支持，不过没有能实现，因为他们毕竟成就有限，难于同整个数学汪洋大海相比，可是十几年来构造主义还是取得一定进展，如《构造性泛函分析》等书问世，说明它还有一定的市场。

6-3 形式主义

一般认为形式主义的奠基人是希尔伯特，但是，希尔伯特自己并不自命为形式主义者。并且，希尔伯特的思想有一个发展变化的过程。我们简单地介绍一下。希尔伯特是二十世纪最有影响的数学家。他不仅是数学上一些分支的公认权威，而且恐怕也是最后一位在几乎所有数学领域中都做出伟大贡献的全才。更重要的是，他对于数学基础问题有着长时期的持久关注，他的思想在现代数学也占有统治地位。

大卫·希尔伯特1862年1月23日，出生在东普鲁士的哥尼斯堡。他一直在家乡上学，1885年取得博士学位。1886年就任哥尼斯堡大学讲师。1888年因为解决了不变式理论中著名的“哥尔丹(Gordan)问题”开始在数学界崭露头角。1891年他升任副教授，1893年升任教授。1895年他应克莱因（F. Klein 1849—1925）之邀，任哥丁根大学教授，由此开辟了哥丁根大学的黄金时代。他在哥丁根大学任教至1930年退休。其间培养了各国数学家，单是

他指导的博士论文就有五、六十篇，由于他的影响，哥丁根成为世界数学的中心，繁盛了三、四十年，一直到希特勒掌权后才迅速地衰落下去。晚年学生大都离开，他于1943年2月14日在孤寂中去世。

希尔伯特前期主要贡献在不变式论方面，1895年左右，写了代数数论的总结性巨著。二十世纪开始时，他的兴趣转向分析及物理学。从十九世纪末，他对数学基础做出重大贡献。

为了方便起见，不妨把他关于数学基础及数理逻辑的主要著作开列如下：

1899年，《几何学基础》，本书多次重印及再版，生前最后一版为第七版（1930），正文部分有中译本。

1900年，实数的公理化

1900年，“数学问题”

1904年，“论逻辑及算术的基础”在海德文堡国际数学家大会上的讲演

1917年，“公理化思想”

1922年“数学的新基础”I

1922年“数学的逻辑基础”

1925年“论无穷”

1927年“数学基础”

1928年“数学基础问题”在意大利波洛那国际数学家大会上讲演

1928年《理论逻辑纲要》(同阿克曼合著),本书很快成为标准著作。1938年第二版,1949年第三版,有中译本,莫绍揆译《数理逻辑基础》,1959年第四版,阿克曼做了很大的改动。

1930年“初等数论基础”

1930年“逻辑及对自然的认识”

1931年“排中律的证明”

1934年《数学基础》Ⅰ

1939年《数学基础》Ⅱ

这两本书与贝纳斯合著。

从希尔伯特的著作看来,希尔伯特提出了大部分形式主义观点,但他并没有把它们绝对化。他的观点有些地方同逻辑主义,直觉主义有着共同之处,这反映出某种矛盾。应该说这种矛盾是数学家的哲学思想上的矛盾。

关于数学中的存在,他认为不限于感觉经验的存在。在物理世界中,他认为没有无穷小、无穷大和无穷集合,但是在数学理论各个分支中却都有无穷集合,如自然数的集合,一个线段里所有点的集合等等。这种不是经验能够直接验证的对象,他称

之为“理想元素”。引进理想元素的方法在数学中其实由来已久。比如代数中虚数的引进，几何中无穷这点的引进，微积分中无穷小与无穷大的引进等等。但是理想元素的引进必须不把矛盾带到原来的较窄狭的领域内。由于理想元素不能靠直观经验来验证，只能靠逻辑来验证，因此，合理性的唯一判据就是无矛盾性。这种无矛盾性的真理观实际上是形式主义基本论点。

但是，希尔伯特并不抱这种极端和绝对的看法，他看到引进新元素往往是对于旧元素的一种扩张，所以很自然地要求扩张之后增加的新元素仍能保留旧元素的大部分基本性质。就象数的扩张仍能使加法交换律保持成立。当然这样也就在一定意义下限制了扩张的任意性。这也是因为对于搞研究的数学家来讲，引进新概念是为了需要，而不是“游戏”，所以，希尔伯特还认为“需要有相应的成果”，而且这是“至高无上的裁判”。把这个标准弄进来，反而使得标准变得模糊不清。

但是在什么情况下，关于理想元素的命题为真呢？这个问题，希尔伯特不认为每一个公式都必须得到验证，每一个概念都必须得到解释，然后通过直观验证。

在1900年的《论数的概念》中，希尔伯特提议用公理化方法来代替“生成的”方法。

在《几何学基础》中，希尔伯特通过解析几何选出的算术模型来证明他的几何公理的无矛盾性。这样证明的是相对无矛盾性。也就是把几何学的无矛盾性归于实数的算术公理的无矛盾性。于是他在1900年国际数学家大会上把算术公理的无矛盾性列为他那著名23个问题中的第二个。他没有指出任何解决这个问题的途径，而只是强调相对无矛盾性的证明没有问题。不久，罗素悖论变得众所周知，从而无矛盾性问题变得更加紧迫。于是，希尔伯特在1904年在德国海德尔堡召开的国际数学家大会上提出第一个证明算术无矛盾性的打算。事实上，这是现代这方面研究的原型。他的草案是：要证明某些初始公式具有无矛盾性，并且推演规则传递这个性质。

在这篇题为《论逻辑和算术的基础》的报告一开头，希尔伯特评论对于算术基础的不同看法。他认为，克洛耐克是教条主义者，因为他原原本本地接受整数及其所有重要性质，他不再深入下去探求整数的基础。德国科学家赫姆霍茨(H.Helmholtz，1821—1894)是经验主义者，按照他的说法，任意

大的数不能够由我们的经验得出，因此是不存在的。另外有一些人特别是德国数学家克里斯多弗（E. B. Christoffel，1829—1900）反对克洛耐克的观点。他们认为，要是没有无理数的概念，整个数学分析就势必要垮掉。于是他们企图找寻正面的、肯定的性质来确认无理数的存在。但是，他认为这种观点是不彻底的，因此说他们是机会主义的。这几种观点，希尔伯特都表示反对。

希尔伯特认为比较深入的观点是下面几种：一是弗雷格的逻辑主义，他把数学规则建立在逻辑的基础上。二是戴德金的先验主义，他是根据哲学上的论证来推断无穷的存在。不过他对数的论述中包含着“所有对象的集合”这类矛盾。三是康托尔的主观主义观点，他清楚地区分“相容集”及“不相容集”，但是他没有提供明显的判据，因此缺乏客观的可靠性。

希尔伯特认为所有困难都可以通过给数的概念建立完全而严格的基础而得到克服，这就是公理化方法。

1904年以后，希尔伯特把主要精力放在研究积分方程等分析问题以及物理学公理化等方面。没有发表什么数学基础方面的著作。这时，各种流派进

行激烈斗争，也不能不使希尔伯特关心。尤其是布劳威尔直觉主义的出现，他感到对于整个数学的生存和发展是个极大的威胁。他开始投入战斗。从1917年起二十多年时间里，他为了挽救古典数学竭尽全力。

1917年他在苏黎世发表一篇演说，题目是“公理思想”，这篇文章全面叙述了一些与认识论有关的问题。如数论和集合论的无矛盾性，每个数学问题的原则上可解性，找出数学证明的单纯性的标准，数学中内容与形式表示的关系，数学问题通过有限步骤的可判定性问题。这些问题预示着后来数理逻辑的发展。他认为，要想深入研究就必须对数学证明的概念进行深入的研究。既然逻辑推理可以符号化，进行数学的研究，为什么证明不行呢？他提出了证明论的一般思想和目标。但是没有具体化。

他第一篇证明论的工作是1922年发表的，在《数学的新基础：第一篇》，他论述如何把数论用有限方法讨论，而数学本身却一般须用超穷方法。他指出用符号逻辑方法可以把命题和证明加以形式化，而把这些形式化的公式及证明直接当做研究对象。在1922年在德国自然科学家协会莱比锡会议

上，他做了《数学的逻辑基础》，更进一步提出了证明方法。要求有限主义，经过有限步不推出矛盾来即为证明可靠。这称为希尔伯特计划。

其实早先弗雷格已经坚持认为需要有明显的符号系统（Symlolism），明显的公理及推演规则，明显的证明。

希尔伯特走得更远，他提出这样一种明显理论本身也做为一种数学研究的对象，且应用适当的方法来判定它是否无矛盾。这种做法一般称为元数学或证明论。

他建议两条最基本的原则

一、形式主义原则：所有符号完全看做没有意义及内容。即使符号、公式或证明的任何有意的意义或可能的解释也不管，而只是把它们看作纯粹的形式对象，研究它们的结构性质。但为了证明，规定不允许存在公式A使A及┐A都可证明。这就给我们一个形式理论T的思想，而它由

1．符号：指定有限或可数个符号为T的符号，必须能够判定什么东西是T的符号。符号的有穷序列称为T的表达式。

2．公式：指定一些表达式是公式，必须能够判定。那些表达式是公式。公式通常由“形成规则”

来指定即构造公式的规则。

3．公理：指定一些公式是公理。哪些公式是公理必须能够判定（公理数目可以可数无穷多）

4．推演规则　必须指定有限多个推演规则R_1，…，R_n（在形式理论T中，推演规则不过是公式之间的关系）。

对每个R_i，必须存在唯一的正整数P，使得对于每个P个公式组，及每个公式中，能够判定是否ϕ与给定的P个公式具有关系R：如果有，ϕ称为T中R_i的P个公式的直接推论。这也就定构造证明的规则。

二、有限主义原则

总能在有限机械步骤之内检证形式理论之内一串公式是否一个证明。

应用数学方法于这样一个形式理论，避免涉及无穷的推断。这就排除康托尔集合论的方法。这个思想是只应用靠得住的方法。因为要证明数学或其一部分无矛盾的方法是大家公认可靠的，整个数学才有牢固的基础。

6-4 数学与哲学

现代的数学家大都很少关心哲学问题，甚至对基础问题一般都不闻不问。从三十年代之后，数理逻辑成为一门极为专门的学科，象几何、拓扑、分析、代数、数论一样，成为专家研究的对象，外行简直难于理解。这样一来，数学家与数学基础、数理逻辑乃至数学哲学脱离越来越远，这可以从当代一位有影响的数学家的说法看出来。布尔巴基学派主要成员丢东涅（J. Dieudonné，1906— ）谈到："众所周知，从十九世纪后半叶以来，数理逻辑和集合论的发展引起当时许多数学家的兴趣乃至极大的热情，他们甚至并非逻辑专家，也毫不迟疑地参与由这些问题所引起的论战。到今天，这种局面完全两样。我觉察不到当代数学界的年轻的领袖人物对于基础问题表示过任何兴趣，除非他们专搞这一行。"当然，他们也不能说没有自己的哲学。拿布尔巴基学派来说，他们就是形式主义派的极端代表。不过，他们对哲学论战不那么感兴趣罢了。

在十九世纪末，这种情况则完全不一样。哲学的论战与基础问题紧密结合在一起，成为几乎每位重要数学家的关注对象。到二十世纪，更是有着所谓三大派——逻辑主义、直觉主义和形式主义的争论。不过这些争论问题并没有得到解决。更重要的是，它们似乎离数学问题越来越远，因此，越来越失掉了指导意义，

三十年代以后，讨论数学哲学的不多论著大都是数理逻辑专家或哲学家写的。因此，他们讨论的哲学问题大都偏重于数理逻辑而较少涉及数学本身的哲学问题。王浩在他的《从数学到哲学》一书中，谈到数学哲学讨论的主要问题：

1. 纯粹逻辑的本性及其在人类知识中的地位。

2. 数学概念的刻划。

3. 直觉及形式化在数学中的地位。

4. 逻辑与数学的关系。

5. 数学的本性及其与下列诸概念的关系：必然性、分析性、真理性、先验性、自明性。

6. 数学在人类知识中的地位。

7. 数学活动及实际。

显然这些问题都是数理逻辑专家感兴趣的题

目。但是在过去，数学哲学的题目比这更广泛，更一般。我们列举几条：

1. 数学的对象以及它们与现实世界(或实在)的关系。

2. (由此产生的)数学中的“存在”，乃至无穷的意义。

3. 数学活动的本质。是发现还是发明。

4. 数学的真理性、绝对性、相对性、约定性。

5. 真理的判断标准。

6. 数学与逻辑的关系。

7. 数学的方法论。公理化与形式化。

数学作为人类知识体系的一部分不能不直接或间接和人类社会实践活动有关。在长期实践过程中，人们进行计数、计算、测量、造型(建筑)、产生出算术、代数、几何等方面数学知识。随着人类认识的深入，形成了数学的体系，它的内容主要是符号化，计算方法，概念与规律性，证明推理。到了十九世纪七十年代，数学内容进一步发生变化：集合论成为统一数学的新基础，数理逻辑的形成，公理化运动，数学结构，抽象数学概念指数增长。在这种情况下数学内容与其实际背景脱离越来

越远，从局部看来仿佛是从天上掉下来的，这就导致数学对象的唯心主义理解。

关于数学的对象有三种观点：实在论、观念论、形式主义：

实在论观点是说数学命题反映我们物理世界最普遍的性质。这种观点比较古老，很长时期占统治地位。按照这种观点，数学是物理科学的一部分。

观念论的数学观认为数学的对象是某种精神或思想对象。按照对象的性质又可以区分为各种观点：一个极端是柏拉图主义，它把经典数学的对象无穷扩张也有其现实性。另一个极端是直觉主义，数学对象是先验的一时的直觉过程。

这种观念论的数学观也遭到批评。一是不确切，二是另有形而上学的假定，而数学应该除掉形而上学前提条件。拿直觉主义来讲什么是“直觉”呢？很难讲清。不过，它们有这样的性质：（1）它本质上是一种思维活动；（2）它是先验的；（3）它不依赖于语言；（4）它是客观的，也就是对于所有思想者都是同样的。

形式主义的数学对象是形式系统。形式系统与以上两种数学观的对象不同，它只是一个架子，指定一些对象而不管其意义如何，然后由对象按照一

定规则组成项，并规定由项组成的一些原始命题的方式，再指定一些原始命题称为公理及推演规则。数学的对象就是这样构成的形式系统，其主要任务就是由这些对象推出定理来。从某种意义上来讲，形式主义的数学就是符号游戏。

从上述几种观点看来，持实在论及柏拉图主义观点的人认为数学是不依赖于人们对它的认识而存在的，因而具有绝对真理的性质。所以数学家的工作就在于发现这种真理。但是直觉主义者和形式主义者则认为数学家的工作在于发明。当然，人们是不可能凭空发明任何东西的。对于直觉主义者来讲，总是承认自然数是给定的，至于别的就是人们从自然数出发的发明。

形式主义者的形式系统虽说可以任意选出，但是终究在发明过程中也仰赖于经验及过去的知识，或者说是从客观世界中归纳出来的。要不然，那就的的确确是游戏了。

不过直觉主义的发明和形式主义的发明完全不同。直觉主义的发明不是任意的，而是必须能够具体选出来，也就是从自然数经过有限多步写出来。他们主张，要证明一个数学对象存在，必须指出这个对象是怎样造出来的。这种观点可以远溯到德国

著名哲学家康德。他认为数学最终的真理性在于数学概念可以通过人的智慧来构造。

由于对数学对象的观点不同，所以对于数学命题的真假以及数学的可接受性也有不同的看法。一门数学是否被大家接受往往不只是靠真、假，而且还有许多其他因素，特别是是否有直观或经验的依据，以及实用性。当然最重要的是真假。不过各派的真理观距离实在太远。

对于实在论者，数学命题的真假靠实践检验。它正如物理学及生物学命题一样，靠观察实验。比如高斯的确实实在在地在地球上找三点，具体测量三角形内角之和是否为180°。

对于观念论者，数学命题的真假要靠先验的假定。

对于形式主义者，数学命题无所谓绝对真假，而是相对于某一个系统，但是这个系统必须是无矛盾的。无矛盾性是真理的判断标准。

产生最大矛盾之处是关于无穷的概念。在有穷的问题上，各派的对立没有那么尖锐，它主要是数学中到处出现的无穷造成的。在古希腊，关于无穷可分性及连续性的芝诺悖论使数学家对无穷特别小心。欧几里得的无穷是潜在的无穷，他不讨论无穷

长的直线而只讨论可以延伸到任意长度的线段。他对无穷观念表现在“素数无穷多”是指任何有限多素数集合之外还有素数，而不考虑所有素数的无穷整体。数学家一直回避这种实在的无穷。一直到康托尔集合论之前，他们都局限于潜在的无穷，也就是超越过所有有限的变化着的有限。而实在的无穷则分为三类：

1. 绝对的实在无限。完全独立的，超越世界而存在的，在神中实现的绝对的实无穷。

2. 超穷。现存世界或被造世界中具体化的无穷。

3. 超穷数。人们所认识的抽象的实在的无穷。

依据对超穷和超穷数的见解，可以区分为下面四种观点：

1. 完全否认超穷和超穷数，如柯西。

2. 承认具体的实在无穷，但否认抽象的实在无穷。例如笛卡尔、莱布尼兹、洛克、斯宾诺莎都持这种看法。

3. 神学的观点，承认抽象的实在无穷而否认具体的实在无穷。也就是显示上帝的伟大，只有上帝才是无穷的，而他所创造的世界只能是有限的。

4. 康托尔的观点是既承认抽象的实在无穷，也承认具体的实在无穷。康托尔的观点中有柏拉图主义成份，他不是形式主义者。

结束语

数学素以精确严密的科学著称，可是在数学发展的历史长河中，仍然不断地出现矛盾以及解决矛盾的斗争，从某种意义下讲，数学就是要解决一些问题，问题不过是矛盾的一种形式。有些问题得到了解决，比如任何正整数都可以表示为四个平方数之和。有些问题至今没有得到解决，比如哥德巴赫猜想，任何大偶数都可以表为两个素数之和。我们还很难说这个命题是对还是不对。因为随便给一个偶数，经过有很多次试验总可以得出结论，但是偶数有无穷多，你穷毕生精力也不会验证完。也许你能碰到一个很大的偶数，找不到两个素数之和等于它，不过即使这样，你也难以断言这种例外偶数是否有限多个，也就是某一个大偶数之后，上述哥德巴赫猜想成立。这就需要证明。而证明则要用有

限的步骤解决涉及无穷的问题，藉助于计算机完成的四色定理的证明，首先也要把无穷多种可能的地图归结成有限的情形，没有有限，计算机也是无能为力的。因此看出数学永远回避不了有限与无穷这对矛盾。只要无穷存在，你就要应付它。这可以说是数学矛盾的根源之一。

在处理出现矛盾的过程中，数学家不可能不进行“创造”，这首先表现在产生新概念上，我们不妨先不管自然数，为了解决实际问题，人们必须发明出“零”来，然后要造出负数、有理数、无理数乃至虚数，所谓虚，就是不实，凭空想象出来的意思，不过解代数方程有必要把它请进来，请进来后又觉得它不实在，不太放心。后来它用处很大，能解决非它不可的问题，于是轰也轰不走了。复数挤进数学王国之后，跟着四元数，八元 数，超 复 数……都来了，它们可没有复数那么大用处，甚至根本没用。要还是不要呢？也使数学家处于为难的境地。数学家经常处于这种矛盾的过程中。“什么是存在？”这是数学的一个基本问题。什么东西可以挤进数学王国？直觉主义者规定一个较窄的限制：必须能够一步一步构造出来，而形式主义者规定一个较宽的限制：只要没有矛盾就行了。不过什么叫

没有矛盾？当然逻辑没有矛盾，其实就是遵守形式逻辑规律。可是形式逻辑是从人类有限经验推出来的，对于无穷情形还灵不灵，这当然存在问题，可是不许推广，那数学还能剩下多少靠得住的东西呢？

在数学史上这种矛盾也是屡见不鲜的。无穷小量刚出现时、漏洞百出、无法自圆其说，可是行之有效、解决问题，所以达兰贝尔说："前进，你就能恢复信心！"这可以说是一种实用主义态度。十九世纪柯西和外尔斯特拉斯用极限概念，ε—δ方法解决了矛盾，同时也扔掉了无穷小。这里无矛盾性占了上风，1961年，罗滨逊发明非标准分析，又把无穷小量请了回来，仍然没有矛盾。不过它是建立在模型论基础上，要承认非可数无穷基数的存在。

承认无穷集合，承认无穷基数，就好象打开潘朵拉的盒子，一切灾难都出来了。这就是第三次数学危机的实质。尽管悖论可以消除，矛盾可以回避，数学的确定性却在一步一步丧失。最近莫利斯·克莱因写了一本《数学——确定性的丧失》就是讲的这件事。现代公理集合论一大堆公理简直难说孰真孰假。可是又不能把它们一古脑儿消除掉，它们跟整个数学可是血肉相连的，所以第三次危机表面上解决了，实质上更深刻地以其它形式延续

着。

矛盾既然是固有的，它的激烈冲突——危机也会给数学带来许多新内容，新认识，有时也带来革命性的变化。把二十世纪的数学同以前整个数学相比，内容不知丰富了多少，认识也不知深入多少。在集合论的基础上，诞生了抽象代数学、拓扑学、泛函分析与测度论。数理逻辑也兴旺发达，成为数学有机整体的一部分。古代的代数几何、微分几何、复分析现在已经推广到高维，代数数论的面貌也多次改变，变得越来越优美，完整。一系列经典问题完满地得到解决，同时又产生更多的新问题。特别是二次大战之后，新成果层出不穷，从未间断。数学呈现无比兴旺发达的景象。而这正是人们在同数学中矛盾斗争的产物。